Proceedings of IAM, V.10, N.2, 2021, pp.181-191

АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКИМИ ДЕМПФЕРАМИ

А.Ф.Расулзаде[1], Н.А. Алиев[2] , Н.И. Велиева[2]

[1] Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
[2] Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail:: resulzadeaynur@gmail.com

Резюме: С помощью метода дискретизации колебательных систем с жидкими демпферами задача сводится к двумерной системе разностных уравнений первого порядка. Используя заданные статические данные рассматривается определение дробных производных в подчиненных членах, строится квадратичный функционал и данная задача исследуется методом наименьших квадратов. Результаты иллюстрируются на конкретном примере и показывается, что при большом числе разбиения интервалов определение аргумента функции колебательных систем и дробных производных идет ухудшение сходимости соответствующего итерационного процесса.

Ключевые слова: колебательная система, дробная производная, интегральное уравнение Вольтерра, метод золотого сечения, квадратичный функционал, метод наименьших квадратов .

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение:

Колебательные системы с жидкими демпферами [4-8,15] и дифференциальные уравнения дробной производной играют важный роль при решении многих практических задач, определение памяти металлов, добычи нефти штанга насосной установкой, и т.п [1-3]
В практике решение соответствующей задачи колебательных систем является трудным. С другой стороны, при определении порядка дробных производных отсутствует метод исследования. В работах [1-3] нахождение порядка дробных производных сталкивается с определенными трудностями. Поэтому имеет смысл предлагать эффективный вычислительный алгоритм для нахождения порядка дробных производных .
В данной работе приводится дискретизация колебательных систем с жидкими демпферами. Представляется решение через начальные данные, где это выражение является более точным, чем результаты полученных в [10-12]. Строится квадратичный функционал, являющийся квадратичным

отклонением от заданных статических данных и находится первая вариация этого функционала вдоль решения уравнения колебательных систем. Далее с помощью золотого сечения [9] строится итерационный процесс, сходящийся к линейному квадратичному функционалу Поэтому имеет смысл дискретизировать уравнение движения в заданном интервале времени и в дискретной постановке определить порядок дробной производной. Результаты иллюстрируются конкретными примерами, определяющими оптимальное разделение интервалов аргумента функции колебательных систем и порядок дробной производной .

2 . Постановка задачи:

Рассмотрим следующую задачу Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с дробными производными в подчиненных членах: [12-15]

$$y''(x) + aD^{\alpha}\, y(x) + by(x) = f(x), \quad x > 0, \quad \alpha \in (1,2)\ , \tag{1}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(0) = y_{10}, \end{cases} \tag{2}$$

где a , b и y_{10}-заданные вещественные числа, $f(x)$ -заданная вещественная непрерывная функция , $y(x)$ -искомая функция, $\alpha \in (1,2)$.

Поставленная задача Коши (1), (2) легко сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго порядка относительно функции $y''(x)$ [14,16,19] т.е.

$$y''(x) + \int_0^x K_\alpha(x-t) y''(t)\, dt = F(x), \ \ x > 0, \tag{3}$$

где

$$K_\alpha(x-t) = a\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x-t)\ , \tag{4}$$

$$F(x) \ = f(x) - \left[a\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + bx\right] y_{10}\ . \tag{5}$$

3. Дискретизация:

Принимая обозначение $y(x) = y_n,\ F(x) = F_n$,

$$y''(x) \approx \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2} \tag{6}$$

и дискретизируя интеграл входящего в (3), получим следующее разностное уравнение

$$\frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2} + h\sum_{k=0}^{n-1} K_\alpha(x_n - x_k)\frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} = F_n, \quad n \geq 0$$

или

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n - h\sum_{k=0}^{n-1}\left[a\frac{(x_n-x_k)^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)!} + b(x_n - x_k)\right](y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) + +h^2\left\{f_n - \left[a\frac{{x_n}^{(1-\alpha)}}{(1-\alpha)!} + bx_n\right]y_{10}\right\}, \qquad n \geq 0 \quad . \tag{7}$$

Проводя вычисления в (7) для четного и нечетного индекса и принимая обозначения

$$W_k = (y_{2k}, y_{2k+1})^T, \qquad k \geq 0, \tag{8}$$

из (8) получим следующее матричное разностное уравнение:

$$\mathrm{W_n} = A^{(n-1)}\mathrm{W_{n\text{-}1}} + \sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{A^{(k)}W_k} + \tilde{f}_n, \qquad n \geq 1 \tag{9}$$

где

$$A_{11}^{(n-1)} = -1 - hK_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-4}) + 2hK_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-3}), \quad n \geq 1 \tag{10}$$

$$A_{12}^{(n-1)} = 2 - hK_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-3}), \quad n \geq 1 \tag{11}$$

$$\begin{aligned} A_{21}^{(n-1)} &= 2 - 2hK_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-4}) + 4hK_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-3}) - hK_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-4}) + \\ &+ 2hK_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-3}) + h^2K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-2})\left[K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-4}) - 2K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-3})\right], n \geq 1 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} A_{22}^{(n-1)} &= 3 - 2hK_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-3}) - hK_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-3}) + \\ &+ h^2K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-2})K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2n-3}), n \geq 1 \end{aligned} \tag{13}$$

$$A_{11}^{(k)} = -h[K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k-2}) - 2K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k-1}) + K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k})], \quad k = \overline{1, n-2}, \tag{14}$$

$$A_{12}^{(k)} = -h\left[K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k-1}) - 2K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k}) + K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k+1})\right], \quad k = \overline{1, n-2}, \tag{15}$$

$$A_{21}^{(k)} = -h\left[2 - hK_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-2})\right]\left[K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k-2}) - 2K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k-1}) + K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k})\right] - \\ - h[K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2k-2}) - 2K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2k-1}) + K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2k})], \qquad k = 1,\dots,n-2 \tag{16}$$

$$A_{22}^{(k)} = -h[2 - hK_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-2})][K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k-1}) - 2K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k}) + K_\alpha(x_{2n-2} - x_{2k+1})] - \\ - h[K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2k-1}) - 2K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2k}) + K_\alpha(x_{2n-1} - x_{2k+1})] \quad k = 1,\dots,n-2 \tag{17}$$

$$\tilde{f}_{n1} = h^2[f_{2n-2} - K_\alpha(x_{2n-2})y_{10}] \tag{18}$$

$$\tilde{f}_{n2} = h^2[f_{2n-1} - K_\alpha(x_{2n-1})y_{10}] + h^2[2 - hK_\alpha(x_{2n-1} - x_{2n-2})][f_{2n-2} - K_\alpha(x_{2n-2})y_{10}] \tag{19}$$

4.Стандартная форма дискретной системы:

Теперь полученную дискретную систему (9) приведем к стандартному виду, исключая из систем (9) все W_k кроме первого, второго и последнего члена (оставляя W_n, $\mathrm{W}_{\mathrm{n-1}}$, W_0), имеем:

$$\mathrm{W}_\mathrm{n} = \psi_{n-1}W_{n-1} + V_{n-1}, \tag{20}$$

где

$$\psi_k = A^{(k)} = \begin{pmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{pmatrix} \quad k = \overline{0, n-2}, \tag{21}$$

$$F_n = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{n1} \\ \tilde{f}_{n2} \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$V_{n-1} = (\chi_n\psi_0 + \psi_0)W_0 + \gamma_{n_{i_1}} + \tilde{f}_n, \tag{23}$$

$$\chi_n = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n-2} \prod_{j=1}^{k} \psi_{i_{k+1-j}}, \tag{24}$$

$$\gamma_{ni_1} = (\sum_{k=1}^{n-2} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n-2} \tilde{f}_{i_1} \prod_{j=1}^{k} \psi_{i_{k+1-j}}), \tag{25}$$

Решая систему (21), т.е. исключая W_{n-1}, или же выражая W_n только лишь через W_0, получим

$$W_n=\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=1}^{j}A^{(i_k)}\right]A^{(0)}W_0+\sum_{s=2}^{n}\left[1+\sum_{j=s}^{n-1}\sum_{1\le i_s<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=s}^{j}A^{(i_k)}\right]A^{(s-1)}F_{s-1}+F_n,\ n\ge 1 \qquad (26)$$

Таким образом, определим решения разностной системы линейных уравнений (9) (в матричном виде) в виде (26), где W_0-задаются в виде начального значения.

5.Построение квадратичного функционала относительно W_k и W_k^{st}.

Пусть заданы статические данные $y_i^{st.}$ $i=\overline{1...k}$ для задачи (1), (2). Тогда определение α для задачи (1), (2) может заменять нахождение α для задачи Коши дискретного уравнения (21) с начальным условием W_0. Однако, здесь W_i^{st} формируется через $y_i^{st.}$ в следующим виде.

$$W_n^{st}=\begin{bmatrix} y_{2n}^{st.} \\ y_{2n+1}^{st.} \end{bmatrix} \qquad (27)$$

Таблица 1.

Значение статистических данных y_i^m

m / i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-0.67	-1.37	-1.13	-1.00	-0.91	-0.84	-0.79	-0.74	-0.71	-0.67
2	0	-0.67	-2.45	-1.58	-1.15	-0.88	-0.68	-0.53	- 0.41	-0.31	-0.22
3	0	-0.67	-3.19	-1.62	-0.93	-0.51	-0.23	-0.02	0.13	0.26	0.37
4	0	-0.67	-2.86	-0.93	-0.16	0.25	0.53	0.72	0.87	0.98	1.08
5	0	-0.67	-0.34	0.81	1.22	1.44	1.57	1.66	1.72	1.77	1.81

Тогда соответствующий квадратичный функционал для метода наименьших квадратов можно формулировать в следующем виде.

$$J=\sum_{n=0}^{k-1}\left(W_n-W_n^{st.}\right)'R\left(W_n-W_n^{st.}\right), \qquad (28)$$

где W_i определятся из уравнений (26), в которых коэффициенты зависят от α . $R=R'\ge 0$ весовая матрица соответствующей размерности.

Учитывая (26) в (28), имеем

$$J=\sum_{n=0}^{k-1}\left(\left[\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=1}^{j}A^{(i_k)}\right]A^{(0)}W_0+\sum_{s=2}^{n}\left[1+\sum_{j=s}^{n-1}\sum_{1\le i_s<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=s}^{j}A^{(i_k)}\right]A^{(s-1)}F_{s-1}+F_n\right]-W_n^{st.}\right)' R\cdot$$

$$\cdot\left[\left[1+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=1}^{j}A^{(i_k)}\right]A^{(0)}W_0+\sum_{s=2}^{n}\left[1+\sum_{j=s}^{n-1}\sum_{1\le i_s<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=s}^{j}A^{(i_k)}\right]A^{(s-1)}F_{s-1}+F_n\right]-W_n^{st} \quad (29)$$

Теперь численно вычислим производную квадратичного функционала (29)

$$DJ=\frac{J(\alpha+\Delta)-J(\alpha)}{\Delta} \quad (30)$$

Приравнивая DJ к нулю, можем числено восстановить α через заданные статические данные W_i^{st}, которые вычисляется по формуле (27) через $y_i^{st.}$.
Таким образом, для численного нахождения α при заданных статистических данных (27), имеем следующий алгоритм:

Алгоритм:

Шаг 1. Задаются параметры $a, b, f, y10, n, \varepsilon, \alpha\in(0,1)$ из (1), (2).
Шаг 2. Вычисляется $A^{(k)}$ и F_n из (22).

Шаг 3. Вычисляем $\prod_{k=\xi}^{j}A^{(i_k)}$, $\sum_{1\le i_\xi<\ldots<i_j\le n-1}\prod_{k=\xi}^{j}A^{(i_k)}$ из (23)-(25).

Шаг 4. Формируется W_i^{st} из (27)

Шаг 5. Формируется J функционал из (29)

Шаг 6. Выбирается начальное $\alpha_0\in(1,2)$ и при выборе $\Delta\alpha$ вычисляется $DJ(\alpha_0)$ из (30).

Шаг 7. Задается малый параметр ε, используя метод золотого сечения находим α^1 и повторяем процедуры до удовлетворения
$\left|\alpha^k-\alpha^{k-1}\right|<\varepsilon$, иначе переходим к шагу 2.

Результаты иллюстрируем на следующем примере.
6. **Пример:** Рассмотрим пример, взятый из [3].

В (1), (2) $a=3$, $b=1$, $f=8$.

Разделяя интервал [0.1,1] на $h=\dfrac{1-0.1}{n}$ и принимая $\Delta\alpha=\dfrac{1.9-1.1}{l}$, имеем (21) в виде, где n=10 , l=5 , вычисляем A^k , F_n .

Принимая $\alpha_0 = 1.1$, решаем задачу с помощью метода золотых сечений, находим
$\alpha_1 = 1.3$. Продолжая процесс вычислений до удовлетворения условия α_k

$$|\alpha_k - \alpha_{k-1}| < \varepsilon,$$

получим $\alpha^* = 1.6995$.

Отметим, что задавая n=10 , l=5 определим α , график которой приведен на рис. 1.

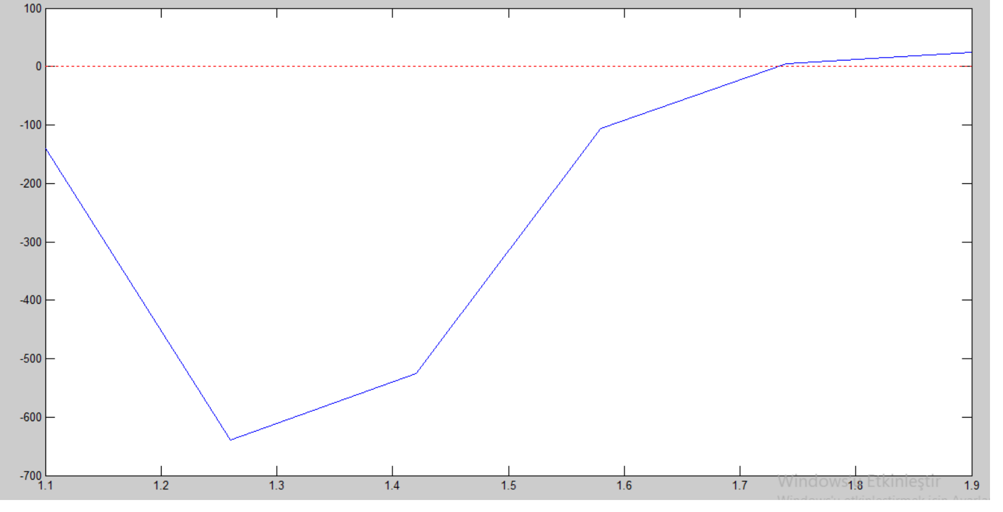

Рис.1 График зависимости α от y(α),который с точностью до 10^{-1} совпадает с результатами [15].

Заключение В данной работе показывается, что задача (1), (2) - метод определения дробного порядка с помощью дискретизации совпадает с результатами [3] с точностью до 10^{-1}. С помощью метода золотого сечения приводится оптимизация выбора шага дискретизации.

Авторы выражают благодарность академику Ф.А. Алиеву за постановку задачи, оказанную помощь и ценные советы при исследовании работ и рекомендации по оформлению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F. A. , Abbasov A. N., Mutallimov M. M. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl. Comput. Math., 2004, V.3, N.1., pp. 2-9 .
2. Aliev F.A., Aliev N.A. , Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math, 2018,V.17,N.3, pp.317-322
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Identification method for defining the order of the fractional derivative oscillatory system Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.1, , pp. 3-13. (in Russian).
4. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., 2013,V.12, pp.306–313.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2015, V.23, N.5, pp.511–518.
6. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, App. Comp. Math., 2016,V.15, pp.370-376.
7. Aliev N.A., Velieva N.I., Rasulzada A.F., Gasimova K.G. метод дискретизации уравнений движения Колебательной системы с жидким демпфером, Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.2, с. 211-228.
8. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput., 2007, V.187, pp.68-78
9. Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming, New-York, Craw-Hill Book Company, 1972, 536 p.
10. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Vasil'ev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1970, V.167, Berlin, Heidelberg, New York.67 p.
11. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336 p.

12. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional – Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010, 414 p.
13. Odibat Zaid M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, Computers and Mathematics with Applications, V.59, 2010, pp.1171-1183.
14. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
15. Shokri A, Ramos H, Mehdizadeh Khalsaraei M, Aliev F.A., Bohner M Fourth derivative singularly P-stable method for the numerical solution of the Schrödinger equation Advances in Difference Equations 2021 (1), pp.1-16
16. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики, ГИФМЛ, Москва 1963, сс.118-119.
17. Мейрманов А.М. Задача Стефана, Новосибирск: Наука, 1986, 239 с.
18. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин, Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 с.
19. Петровски И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: "Наука", 1965, 128 с.

ALGORITHM FOR DETERMINING FRACTIONAL DERIVATIVES FOR DISCRETE VIBRATION SYSTEMS WITH A LIQUID DAMPER

A.F.Rasulzada, N.A.Aliev, N.İ.Velieva

Abstract: Using the method of discretization of oscillatory systems with liquid dampers, a system of the first-order difference equations is reduced to the two-dimensional system. Using the given static data, the definition of fractional derivatives in subordinate terms is considered, a quadratic functional is constructed and this problem is investigated by the least squares method. The results are illustrated with a specific example and it is shown that with a large number of partitions of intervals, the determination of the argument of the function of oscillatory systems and fractional derivatives leads to a deterioration in the convergence of the corresponding iterative process.

Keywords: oscillatory system, fractional derivative, Volterra integral equations, golden section method, quadratic functional, least squares method.

REFERENCES

1. Aliev F. A. , Abbasov A. N., Mutallimov M. M. Algorithm for solution of the problem of optimization of the energy expenses at the exploitation of chinks by subsurfase - pump installations, Appl. Comput. Math., 2004, V.3, N.1., pp. 2-9 .
2. Aliev F.A., Aliev N.A. , Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix. Appl.Comp.Math, 2018,V.17,N.3, pp.317-322
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Identification method for defining the order of the fractional derivative oscillatory system Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.1, , pp. 3-13. (in Russian).
4. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., 2013,V.12, pp.306–313.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2015, V.23, N.5, pp.511–518.
6. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A., Rajabov M.F. Algorithm for calculating the parameters of formation of gas-liquid mixture in the shoe of gas lift well, App. Comp. Math., 2016,V.15, pp.370-376.
7. Aliev N.A., Velieva N.I., Rasulzada A.F., Gasimova K.G. метод дискретизации уравнений движения Колебательной системы с жидким демпфером, Proceedings of IAM, 2019 ,V.8, N.2, с. 211-228.
8. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput., 2007, V.187, pp.68-78
9. Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming, New-York, Craw-Hill Book Company, 1972, 536 p.
10. Lavrent’ev M.M., Romanov V.G., Vasil’ev V.G. Multidimensional Inverse Problems for Differential Equations, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1970, V.167, Berlin, Heidelberg, New York.67 p.
11. Miller K.S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336 p.

12. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional – Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, 2010, 414 p.
13. Odibat Zaid M. Analytic study on linear systems of fractional differential equations, Computers and Mathematics with Applications, V.59, 2010, pp.1171-1183.
14. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993, 780 p.
15. Shokri A, Ramos H, Mehdizadeh Khalsaraei M, Aliev F.A., Bohner M Fourth derivative singularly P-stable method for the numerical solution of the Schrödinger equation Advances in Difference Equations 2021 (1), pp.1-16
16. Demidovich B.P., Maron I.A. Osnovy vychislitel'noy matematiki, GIFML, Moskva 1963, ss.118-119.
17. Meyrmanov A.M. Zadacha Stefana, Novosibirsk: Nauka, 1986, 239 s. (Meyrmanov A.M., Problems of Stephan, Novosibirsk: Education, 1986, 239 p))(in Russian)
18. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metody resheniya zadach optimizatsii pri ekspluatatsii neftyanykh skvazhin, Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 s. (Mutallimov M.M., Aliev F.A. Metods for solving optimization problems in the operation of oil wells, Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164p) (in Russian)
19. Petrovski I.G. Lektsii po teorii integral'nykh uravneniy. M.: "Nauka", 1965, 128 s.(Petrovski I.G. Lectures on the theory of integral equations. "Science", Moscow, 1965, 128 p.) (in Russian)