

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПО ЧАСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ С НАЧАЛЬНЫМИ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ*

И.А. МАГЕРРАМОВ

Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан

e-mail: ilkin_072@mail.ru

Абстракт. Рассматривается решение по части периодической дискретной задачи оптимального управления с начальными управляющими воздействиями. С помощью дискретного уравнения Эйлера-Лагранжа предлагается алгоритм для нахождения программных оптимальных траекторий и управлений. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: периодическая оптимизация, уравнения Эйлера-Лагранжа, разностное уравнение, квадратичный функционал

AMS Subject Classification: 49N10, 49N20, 65F10.

Введение. Как известно [1, 2] движение газа и газожидкостной смеси в газлифтном процессе описывается то дифференциальными, то конечно-разностными уравнениями, где такое описание осложняет разработку «однородного» алгоритма. А это создает трудности получения решения требующего достаточной точности [4]. Исходя из этих фактов в настоящем работе рассматриваются задачи дискретного по части периодического оптимального управления. Далее, с помощью дискретного уравнения Эйлера-Лагранжа [7], приведен решение данной задачи. Результаты иллюстрируется простым числовым примером, возникающем при управлении газлифтного процесса.

Постановка задачи. Пусть движение объекта описывается на интервалах $[0, l + 0)$, $(l - 0, l + 0)$ и $(l + 0, 2l]$ со следующими разностными уравнениями

$$y(x_{i+1}) = f_1(y(x_i), x_i), \quad y(0) = u, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \quad (1)$$

$$y(x_{l+0}) = F_\delta y(x_{l-0}) + V, \quad x_{l-0} < l < x_{l+0} \quad (2)$$

$$y(x_{i+1}) = f_2(y(x_i), x_i), \quad x_{l+0} < x_i < 2l \quad (3)$$

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики БГУ 14.06.2022

Здесь y – n -мерный фазовый вектор, начальное управление u – n -мерный постоянный вектор, f_1, f_2 вектор-функции – размерности n и кусочно-постоянные, а F_δ, V заданные постоянные векторы.

Требуется найти управление u таким образом, чтобы следующий функционал

$$J = u^T R u + y^T(x_{l+0}) Q y(x_{l+0}) + \sum_{x_i=x_0}^{2l} L(y(x_i), x_i) \quad (4)$$

получил бы минимальное значение при условии частичной периодичности $y(x_i)$ в точках x_{l+0} и $2l$, т.е.

$$y(x_{l+0}) = y(2l), \quad (5)$$

где $R = R^T > 0$, $Q = Q^T < 0$ постоянные матрицы размерности $n \times n$, $L(y(x_i), x_i)$ заданная функция, T - знак транспонирование.

Метод Лагранжа для решения задачи (1)-(5).

Составляя расширенный функционал [7] для оптимизационной задачи (1)-(5) имеем следующие дискретные уравнения Эйлера-Лагранжа

$$2Ru - \lambda(0) = 0, \quad (6)$$

$$\lambda(x_i) + \frac{\partial L(y(x_i), x_i)}{\partial y} - \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1}) \frac{\partial f_1(y(x_i), x_i)}{\partial y} = 0, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \quad (7)$$

$$\lambda(x_i) + \frac{\partial L(y(x_i), x_i)}{\partial y} - \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1}) \frac{\partial f_2(y(x_i), x_i)}{\partial y} = 0, \quad x_{l+0} < x_i < 2l \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(x_{l-0}) &= Qy(x_{l-0}) + F_\delta \lambda(x_{l+0}) \\ y(x_{l+0}) &= F_\delta y(x_{l-0}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\lambda(x_{l+0}) = \lambda(2l) \quad (10)$$

Здесь $\lambda(x_i)$ Лагранжевый множитель. Итак, решив разностные уравнения (1)-(3), (7)-(9) с граничными условиями (5), (6), (10) имеем искомое решение соответствующей оптимизационной задачи.

Построение программных траекторий и управлений. Сначала из (6) находим управление u через $\lambda(0)$ в следующем виде

$$y(0) = u = \frac{1}{2} R^{-1} \lambda(0), \quad (11)$$

где используя последнее в (1), (3) и (7), (8) имеем на $(0, x_{l-0})$

$$\left. \begin{aligned} y(x_{i+1}) &= f_1(y(x_i), x_i), \quad y(0) = \frac{1}{2} R^{-1} \lambda(0), \\ \lambda(x_i) &= -\frac{\partial L(y(x_i), x_i)}{\partial y} + \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1}) \frac{\partial f_1(y(x_i), x_i)}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

а в $(x_{l+0}, 2l)$

$$\left. \begin{aligned} y(x_{i+1}) &= f_2(y(x_i), x_i), \\ \lambda(x_i) &= -\frac{\partial L(y(x_i), x_i)}{\partial y} + \lambda^T(y(x_{i+1}), x_{i+1}) \frac{\partial f_1(y(x_i), x_i)}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Таким образом, требуется найти решение (12), (13), с условиями (5), (10), (11). Здесь имеются по части периодичности условия (5) и (10)

$$y(x_{l+0}) = y(2l), \quad \lambda(x_{l+0}) = \lambda(2l). \quad (14)$$

Итак, решение задачи дискретного граничного оптимального управление (1)-(5) сводится к решению краевой задачи (12), (3), (9) с неразделенными граничными условиями (11), (14) где для ее решения имеются хорошо разработанные алгоритмы, такие как метод квазилинеаризации [3,6].

Пример. Для простоты рассмотрим линейный случай. Тогда уравнение движения газа и газожидкостной смеси, усредненной по времени имеет вид [4, 5]

$$\dot{Q}(x) = \frac{2\rho F Q^2(x)}{c^2 \rho^2 F^2 \mu - Q^2(x)} = f(\mu) \quad (15)$$

где μ -малый параметр. Используем метод квазилинеаризации [6]. Разлагая $f(\mu)$ в ряд Маклорена и взяв в (15) нулевое приближение $f(0)$ получим

$$\dot{Q}(x) = -2\rho F. \quad (16)$$

Далее, используя $\dot{Q}(x_i) \approx \frac{Q(x_{i+1}) - Q(x_i)}{h}$, где $h = x_{i+1} - x_i = \frac{l}{N}$, $x_0 = 0$ из (16) получим следующую задачу, подобно (1)-(5):

$$Q(x_{i+1}) = Q(x_i) - 2\rho Fh, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \quad (17)$$

$$Q(x_0) = Q(0) = u \quad (18)$$

$$Q(x_{l+0}) = F_\delta Q(x_{l-0}) + V, \quad x_{l-0} < l < x_{l+0} \quad (19)$$

$$Q(x_{i+1}) = Q(x_i) - 2\rho Fh, \quad x_{l+0} < x_i < 2l \quad (20)$$

$$\alpha Q(x_{l+0}) = Q(2l), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (21)$$

Допустим, что $x_{l-0} = l - h_1$, $x_{l+0} = l + h_1$, где $0 < h_1 \ll h$. Здесь в качестве функционала (4) для простоты возьмем

$$J = u^T R u. \quad (22)$$

Нетрудно видеть, что

$$Q(x_i) = Q(0) - 2\rho F \cdot ih, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \quad (23)$$

а

$$Q(x_{l-0}) = Q(0) - 2\rho F \cdot (N - 1)h - 2\rho Fh_1. \quad (24)$$

Аналогично, получим

$$Q(x_i) = Q(x_{l+0}) - 2\rho Fh_1 - 2\rho F(i - 1)h, \quad x_{l+0} < x_i < 2l. \quad (25)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для задачи (17)-(21) будет иметь следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} 2Ru - \lambda(0) = 0 \\ Q(x_{i+1}) = Q(x_i) - 2apFh, \quad 0 < x_i < x_{l-0} \\ Q(0) = u \\ Q(x_{l+0}) = F_\delta Q(x_{l-0}) + V \\ Q(x_{l+1}) = Q(x_i) - 2apFh, \quad x_{l+0} < x_l < 2l \\ \lambda Q(x_{l+0}) = Q(2l) \\ \lambda(x_{l-0}) = F_\delta \lambda(x_{l+0}) \\ \lambda(x_{l+0}) = \alpha \lambda(2l) \\ \lambda(x_{i+1}) = \lambda(x_i) \quad 0 < x_i < x_{l-0} \\ \lambda(x_{i+1}) = \lambda(x_i) \quad x_{l+0} < x_i < 2l \end{array} \right. \quad (26)$$

Решая дискретные уравнения в (26) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(x_i) = Q(0) - 2apF \cdot ih \quad 0 < x_i < x_{l-0} \\ Q(x_i) = Q(x_{l+0}) - 2apFh_1 - 2apf(i-1)h \quad x_{l+0} < x_i < 2l \\ \lambda(x_i) = \lambda(0) \quad 0 < x_i < x_{l-0} \\ \lambda(x_i) = \lambda(x_{l+0}) \quad x_{l+0} < x_i < 2l \end{array} \right. \quad (27)$$

Далее, из (26) и (27) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$Q(0), \lambda(0), Q(x_{l-0}), \lambda(x_{l-0}), Q(x_{l+0}), \lambda(x_{l+0}), Q(2l)$ и $\lambda(2l)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(x_{l-0}) = Q(0) - 2apF(N-1)h - 2apFh_1 \\ Q(2l) = Q(x_{l+0}) - 2apFh_1 - 2apF(N-1)h \\ Q(x_{l+0}) = F_\delta Q(x_{l-0}) + V \\ \lambda(x_{l-0}) = F_\delta \lambda(x_{l+0}) \\ \alpha Q(x_{l+0}) = Q(2l) \\ \lambda(x_{l+0}) = \alpha \lambda(2l) \\ \lambda(x_{l-0}) = \lambda(0) \\ \lambda(2l) = \lambda(x_{l+0}) \end{array} \right. \quad (28)$$

Таким образом, решая СЛАУ (28), мы можем найти искомые неизвестные, а далее программную траекторию и управление.

Литература

1. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах // Нелинейные колебания, 2014, т.17, No 2, с . 151 - 160.

2. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом. // Доклады НАН Азербайджана, том LXV, №5, 2009, с.9-18.
3. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Елм, 1989, 320 с.
4. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса // Прикладная механика, 2010, т. 46, № 6, с.113-122.
5. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. // Докл. НАН Азербайджана, 2008, №4, с.30-41.
6. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968, 183 с.
7. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972, 554 с.

**SOLUTION ALGORITHM FOR A PERIODIC DISCRETE OPTIMIZATION
PROBLEM WITH INITIAL CONTROL ACTIONS**

I.A. MAGERRAMOV

ABSTRACT

The solution of a periodic discrete optimal control problem with initial control actions is considered. Using the discrete Euler-Lagrange equation, an algorithm is proposed for finding software optimal trajectories and controls. The results are illustrated by an example.

Keywords: periodic optimization, Euler-Lagrange equations, quadratic functional, difference equation

AMS Subject Classification: 49N10, 49N20, 65F10.

References

1. Aliev F.A., Ismailov N.A. Zadachi optimizacii s periodicheskim kraevym uslovиеm i granichnym upravleniem v gazliftnyh skvazhinah // Nelinejnye kolebanija, 2014, t.17, No 2, с . 151 - 160 Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimization problems with a periodic boundary condition (and boundary control in gas-lift wells, Nonlinear Oscillations, V.17, N.2, 2014, pp.151-160.)
2. Aliev F.A., Mutallimov M.M. Algoritm dlya resheniya zadachi postroeniya programmnykh traektorii i upravleniya pri dobyche nefi gazliftnym sposobom. // Doklady NAN Azerbaydzhana, tom LXV, №5, 2009, s.9-18.(Aliev F.A., Mutallimov M.M. Algorithm for solving the problem of constructing software

- trajectories and control in oil production by gas lift, Reports of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, V. LXV, N.5, 2009, pp. 9-18.)
3. Aliev F.A. Metody resheniya prikladnykh zadach optimizatsii dinamicheskikh sistem. Baku: Elm, 1989, 320 s.(Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems. Baku: Elm, 1989, 320 p).
 4. Aliev F.A., Il'yasov M.Kh., Nuriev N.B. Zadachi modelirovaniya i optimal'noy stabilizatsii gazliftnogo protsessa // Prikladnaya mekhanika, 2010, t. 46, № 6, s.113-122.(Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Nuriev N.B. Problems of modeling and optimal stabilization of the gas lift process, Applied Mechanics, V. 46, N.6, 2010, pp.113-122.)
 5. Aliev F.A., Il'yasov M.Kh., Dzhambalbekov M.A. Modelirovanie raboty gazliftnoy skvazhiny. // Dokl. NAN Azerbaydzhana, 2008, №4, s.30-41.(Aliev F.A., Ilyasov M.Kh., Jamalbekov M.A. Simulation of gas-lift well operation. // Dokl. Azerbaijan National Academy of Sciences, N. 4, 2008, pp. 30-41.)
 6. Bellman R., Kalaba R. Kvazilinearizatsiya i nelineynye kraevye zadachi.M.: Mir, 1968, 183 s.(Bellman R., Calaba R. Quasi-linearization and nonlinear boundary value problems. Moscow: Mir, 1968, 183 p.)
 7. Brayson A., Kho Yu-shi. Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya. Moskva: Mir, 1972, 554 s.(Bryson A., Ho Yu-shih. Applied theory of optimal control. Moscow: Mir, 1972, 554p.)