Proceedings of IAM, V.12, N.2, 2023, pp.166-180
DOI: 10.30546/2225-0530.12.2.2023.166

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ И УПРАВЛЕНИЙ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ КВАДРОКОПТЕРА

Н.С. Гаджиева[1], М.М. Муталлимов[1]

[1]Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, Баку, Азербайджан
e-mail: nazile.m@mail.ru, mutallim@mail.ru

Резюме. Для управления движением квадрокоптера определяется задача программных траекторий и управлений при вертикальном движении. Данная задача формулируется в виде линейно - квадратичной задачи оптимального управления с краевыми условиями, где для ее решения используются уравнения Эйлера-Лагранжа. Результаты иллюстрируются на конкретном численном примере.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, математическая модель, уравнения Эйлера-Лагранжа, программная траектория, управление, системы линейных алгебраических уравнений.

AMS Subject Classification: 26A33.

1. Введение

В последнее время наблюдаются много исследований, которые ведутся при разработке алгоритмов при движении квадрокоптера с помощью соответствующих регуляторов [1,22, 23]. Однако, немаловажную роль играет построение программных траекторий и управлений, где движение нужно организовать около этих программных траекторий и управлений [2,5,9,18,26,28]. Отметим, что здесь движение можно разделить на три части - вертикальное, боковое и горизонтальное.

В настоящее время в инженерной практике значительное место занимают математические задачи, которые, в той или иной постановке, связаны с управлением сложными механическими системами [3,4,11,12,25,27].

В то же время появляется всё большее количество работ, посвященных моделированию движения квадрокоптеров [13,17,20, 29-32], где приводятся различные варианты уравнений движения с различными системами автоматического управления и стабилизации и производится моделирование динамики этих систем.

Среди множества математических моделей динамики квадрокоптера [6,8,10,16,19,21,24] мы остановились на нормированной модели, предложенной в [15].

В работе рассматривается вертикальное движение, где отмечают начальные и конечные данные-координаты. Минимизируется квадратичный критерий качества, который обеспечивает минимальность комбинации фазовых координат и управлений. Составляется расширенный критерий качества и описывается уравнение Эйлера-Лагранжа. Решая эти уравнения программных траекторий и управлений, получаются конкретные значения. Результаты иллюстрируются конкретными примерами.

2. Постановка задачи

Пусть движение объекта описывается в виде [7]

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), 0 < t < T, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$z(0) = z_0,\ z(T) = z_T,\ \psi(0) = \psi_0, \tag{2}$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \psi(t), \\ \dot{z}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$-вектор управляющих воздействий, где $u_1(t) -$ является усилием действующих на $z(t), \dot{z}(t)$, а $u_2(t)$ –на углах $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$. z_0, z_T, ψ_0-известные параметры.

Введем скалярный критерий качества

$$J = \alpha\psi^2(T) + \int_0^T [u'(t)Ru(t) + x'(t)Cx(t)]dt, \tag{3}$$

где $\alpha \gg$, $R, C -$ единичные матрицы размерности 4×4.

Задача состоит в том, чтобы определить управление $u(t)$ и соответствующую траекторию $x(t)$, которые удовлетворяют (1), краевым условиям (2) и доставляют минимум (3).

3. Построение уравнения Эйлера-Лагранжа.

Прибавив к выражению для J систему уравнений (1), условия (2) с множителем Лагранжа $\lambda(t)$, получим вспомогательный критерий качества [14]

$$\bar{J} = \alpha\psi^2(T) + \lambda_1(0)[z(0) - z_0] + \lambda_2(T)\,[\psi(0) - \psi_0] +$$

$$+\lambda_1(T)[z(T) - z_T] +$$

$$+\int_0^T \{u'(t)Ru(t) + x'(t)Cx(t) + \lambda'(t)[Fx(t) + Gu(t) - \dot{x}(t)]\}dt, \qquad (4)$$

где $\lambda(t) = [\lambda_1(t)\ \lambda_2(t)\ \lambda_3(t)\ \lambda_4(t)]'$.

Интегрируя по частям последнее слагаемое в правой части соотношения (4), получим:

$$\bar{J} = \alpha\psi^2(T) + \lambda_1(0)[z(0) - z_0] + \lambda_2(T)[\psi(0) - \psi_0] +$$

$$+\lambda_1(T)[z(T) - z_T] +$$

$$+\int_0^T \left\{u'(t)Ru(t) + x'(t)Cx(t) + \lambda'(t)[Fx(t) + Gu(t)] + \dot{\lambda}'(t)x(t)\right\}dt -$$
$$-\lambda_1(T)z(T) - \lambda_2(T)\psi(T) - \lambda_3(T)\dot{z}(T) - \lambda_4(T)\dot{\psi}(T) + \lambda_1(0)z(0) +$$

$$+\lambda_2(0)\psi(0) + \lambda_3(0)\dot{z}(0) + \lambda_4(0)\dot{\psi}(0). \qquad (5)$$

Рассмотрим теперь вариацию критерия качества $\bar{J}$:

$$\delta\bar{J} = \lambda_1(0)\delta z(0) + \lambda_2(T)\,\delta\psi(0) + \lambda_1(T)\delta z(T) +$$

$$+\int_0^T \left\{[2u'(t)R + \lambda'(t)G]\delta u + [2x'(t)C + \lambda'(t)F + \dot{\lambda}'(t)]\delta x(t)\right\}dt -$$
$$-\lambda_1(T)\delta z(T) - \lambda_2(T)\delta\psi(T) - \lambda_3(T)\delta\dot{z}(T) - \lambda_4(T)\delta\dot{\psi}(T) +$$

$$+\lambda_1(0)\delta z(0) + \lambda_2(0)\delta\psi(0) + \lambda_3(0)\delta\dot{z}(0) + \lambda_4(0)\delta\dot{\psi}(0). \qquad (6)$$

Выберем множитель $\lambda(t)$ таким образом, чтобы коэффициенты при $\delta x(t), \delta u(t), \delta\psi(T), \delta\dot{z}(0),\ \delta\dot{\psi}(0),\ \delta\dot{z}(T), \delta\dot{\psi}(T)$ в (6) обратились в нуль.

Тогда мы получим уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\lambda}(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{c} z(0) = z_0, \quad z(T) = z_T, \ \psi(0) = \psi_0 \\ 2\alpha\psi(T) - \lambda_2(T) = 0, \ \lambda_3(0) = 0, \ \lambda_4(0) = 0, \\ \lambda_3(T) = 0, \ \lambda_4(T) = 0, \end{array}\right\} \tag{8}$$

где

$H = \begin{bmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \\ -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & -E & 0 \end{bmatrix} -$ матрица Гамильтона, $E -$ единичная матрица

размерности 2×2.

Решение уравнений (7) имеет вид

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = e^{Ht} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \left[E + tH + \frac{t^2}{2!}H^2 + \frac{t^3}{3!}H^3\right] \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + o(t), \tag{9}$$

где

$$H^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & E & E & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & E \end{bmatrix}, \qquad H^3 = \begin{bmatrix} 0 & E & E & 0 \\ -E & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & -E & 0 \end{bmatrix}.$$

Закон оптимального управления записывается в виде:

$$u(t) = -\frac{1}{2}(R^{-1})'G'\lambda(t). \tag{10}$$

4. Построение программных траекторий и управлений. Подставляя значения H, H^2, H^3 в (9) соответственно, имеем

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} E & (t+t^3/6)E & (t^3/6)E & -(t^2/2)E \\ -(t^3/6)E & E+(t^2/2)E & (t^2/2)E & -(t+t^3/6)E \\ -tE & -(t^2/2)E & E & (t^3/6)E \\ (t^2/2)E & -tE & -(t+t^3/6)E & E+(t^2/2)E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Пишем решение (11) в более расширенном виде:

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ \psi(t) \\ \dot z(t) \\ \dot\psi(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \\ \lambda_4(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & t+t^3/6 & 0 & t^3/6 & 0 & -t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t+t^3/6 & 0 & t^3/6 & 0 & -t^2/2 \\ -t^3/6 & 0 & 1+t^2/2 & 0 & t^2/2 & 0 & -t-t^3/6 & 0 \\ 0 & -t^3/6 & 0 & 1+t^2/2 & 0 & t^2/2 & 0 & -t-t^3/6 \\ -t & 0 & -t^2/2 & 0 & 1 & 0 & t^3/6 & 0 \\ 0 & -t & 0 & -t^2/2 & 0 & 1 & 0 & t^3/6 \\ t^2/2 & 0 & -t & 0 & -t-t^3/6 & 0 & 1+t^2/2 & 0 \\ 0 & t^2/2 & 0 & -t & 0 & -t-t^3/6 & 0 & 1+t^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(0) \\ \psi(0) \\ \dot z(0) \\ \dot\psi(0) \\ \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \\ \lambda_3(0) \\ \lambda_4(0) \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Из (12) имеем:

$$\begin{cases} z(t) = z(0) + (t+t^3/6)\dot z(0) + (t^3/6)\lambda_1(0) - (t^2/2)\lambda_3(0) \\ \psi(t) = \psi(0) + (t+t^3/6)\dot\psi(0) + (t^3/6)\lambda_2(0) - (t^2/2)\lambda_4(0) \\ \dot z(t) = -(t^3/6)z(0) + (1+t^2/2)\dot z(0) + (t^2/2)\lambda_1(0) - (t+t^3/6)\lambda_3(0) \\ \dot\psi(t) = -(t^3/6)\psi(0) + (1+t^2/2)\dot\psi(0) + (t^2/2)\lambda_2(0) - (t+t^3/6)\lambda_4(0) \\ \lambda_1(t) = -tz(0) - (t^2/2)\dot z(0) + \lambda_1(0) + (t^3/6)\lambda_3(0) \\ \lambda_2(t) = -t\psi(0) - (t^2/2)\dot\psi(0) + \lambda_2(0) + (t^3/6)\lambda_4(0) \\ \lambda_3(t) = (t^2/2)z(0) - t\dot z(0) - (t+t^3/6)\lambda_1(0) + (1+t^2/2)\lambda_3(0) \\ \lambda_4(t) = (t^2/2)\psi(0) - t\dot\psi(0) - \left(t + \dfrac{t^3}{6}\right)\lambda_2(0) + (1+t^2/2)\lambda_4(0). \end{cases}$$

Чтобы определить $[z(t)\ \psi(t)\ \dot z(t)\ \dot\psi(t)\ \lambda_1(t)\ \lambda_2(t)\ \lambda_3(t)\ \lambda_4(t)]'$, учитываем условия (8) предыдущего выражения. Тогда получим, что

$$\lambda_2(0) = \frac{\left(\alpha T^2 + \frac{\alpha T^4}{6} + \frac{T^3}{4} + T + 2\alpha\right)\psi_0}{\left(2\alpha T + \frac{\alpha T^3}{3} + \frac{T^2}{2}\right)\left(1 + \frac{T^2}{6}\right) + 1 - \frac{\alpha T^3}{3}}, \quad (13)$$

$$\dot\psi(0) = \frac{T}{2}\psi_0 - \left(1 + \frac{T^2}{6}\right)\lambda_2(0), \quad (14)$$

$$\dot\psi(T) = -\frac{T^3}{6}\psi_0 + \left(1 + \frac{T^2}{2}\right)\dot\psi(0), \quad (15)$$

а $\dot z(0), \dot z(T), \lambda_1(0),\ \lambda_1(T)$ определяются из следующей системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \dot{z}(0) \\ \dot{z}(T) \\ \lambda_1(0) \\ \lambda_1(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 0 & T+T^3/6 & 0 \\ T^2/2 & 0 & -1 & 1 \\ 1+T^2/2 & -1 & T^2/2 & 0 \\ T+T^3/6 & 0 & T^3/6 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^2 z_0/2 \\ -Tz_0 \\ T^3 z_0/6 \\ z_T - z_0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Подставляя значения $z(0), \psi(0), \dot{z}(0), \dot{\psi}(0), \lambda_1(0), \lambda_2(0), \lambda_3(0) = 0,\ \lambda_4(0) = 0$ в (11), мы определяем программные траектории $x(t)$, а оптимальное управление $u(t)$ из (10).

5. Численная реализация.

Таким образом, мы можем построить следующий алгоритм.

Алгоритм.

1. Ввод параметров $T,\ z(0),\ z(T),\ \psi(0)$ матрицы $G,\ C$, заданные в (1)-(3).
2. Вычисление выражений $\lambda_2(0),\ \dot{\psi}(0)$ из (13), (14) соответственно.
3. Ввод $\lambda_3(0) = 0,\ \lambda_4(0) = 0$.
4. Определение параметров $\dot{z}(0), \lambda_1(0)$ из (16).
5. С учетом этих параметров в (12), получение программной траектории $x(t)$.
6. Получение оптимального управления $u(t)$ с помощью подстановки полученных значений $\lambda(t)$ из (12) в (10).

Теперь изложенный алгоритм апробируем на примере:

Пусть из (2) $T = 10,\ z(0) = 0,\ z(T) = 2,\ \psi(0) = 1$.

Тогда из (12) и (10), соответственно, получим, что на интервале [0, T] значения программных траекторий и оптимальных управлений имеют вид

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8	..	10
$z(t)$	0	0.01	0.03	0.08	0.16	0.29	0.47	0.72	1.05		2
$\psi(t)$	1	0.7	0.44	0.19	-0.01	-0.1	-0.26	-0.28	-0.21		0.23
$\dot{z}(t)$	0.012	0.017	0.034	0.062	0.102	0.153	0.2150	0.288	0.373		0.57
$\dot{\psi}(t)$	-0.28	-0.44	-1.59	-4.73	-10.85	-20.96	-36.0	-57.1	-85.2		-166.3

T	0	1	2	3	4	..	8	9	10

$u(t)$	0 0	0.0056 -0.21	0.0108 -0.78	0.0154 -1.55	0.0190 -2.37		0.016 - 3.1	0.009 -2.01	0 0

Изменения $\psi(T)$ в зависимости от значения α:

α	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5
$\psi(T)$	2.044	0.23	0.02	0.002	0.0002	0.00002

Далее, введем графики программной траектории, скорости программной траектории и управления:

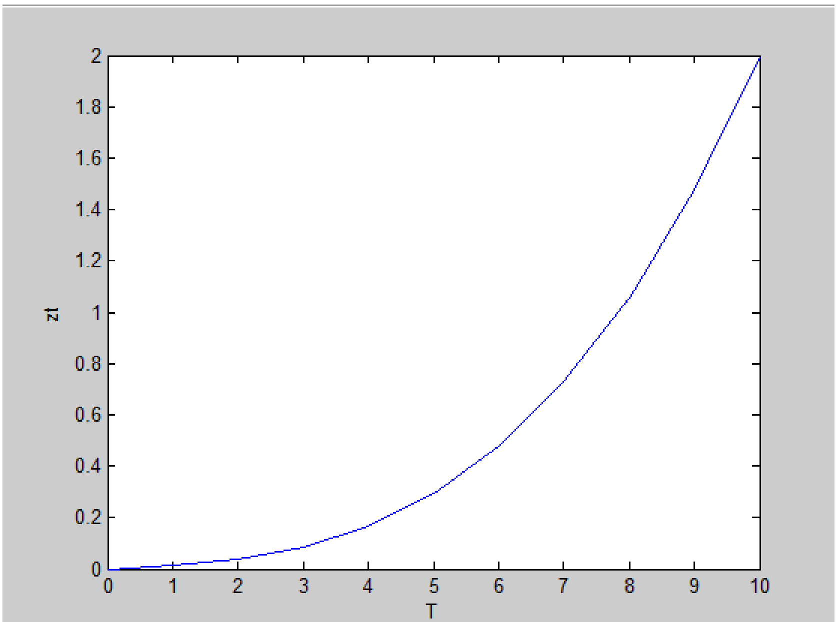

Рис.1. Изменение функции *z*(*t*) на интервале [0, T].

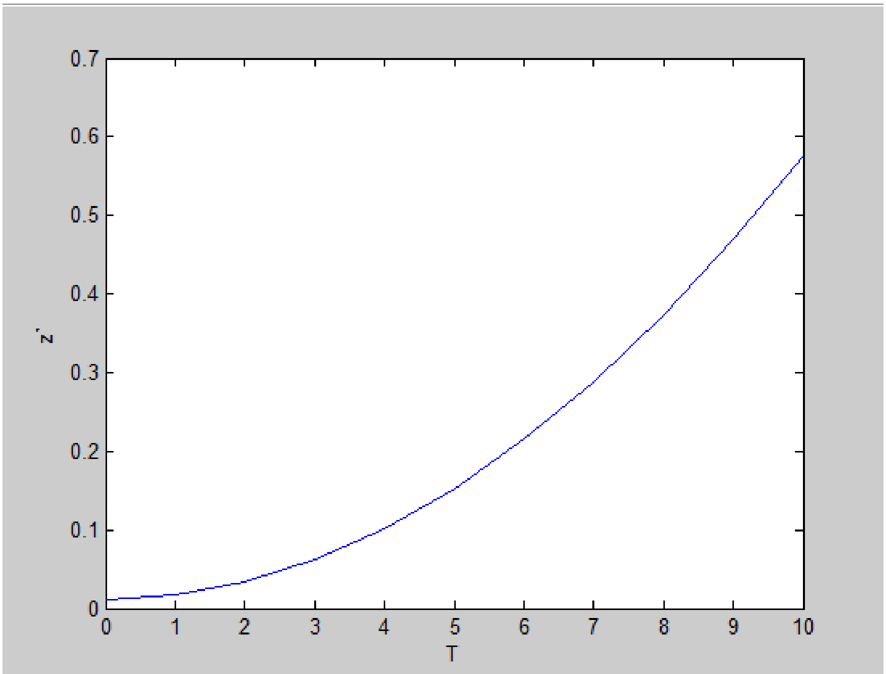

Рис.2. Изменение функции $\dot{z}(t)$ на интервале [0, T].

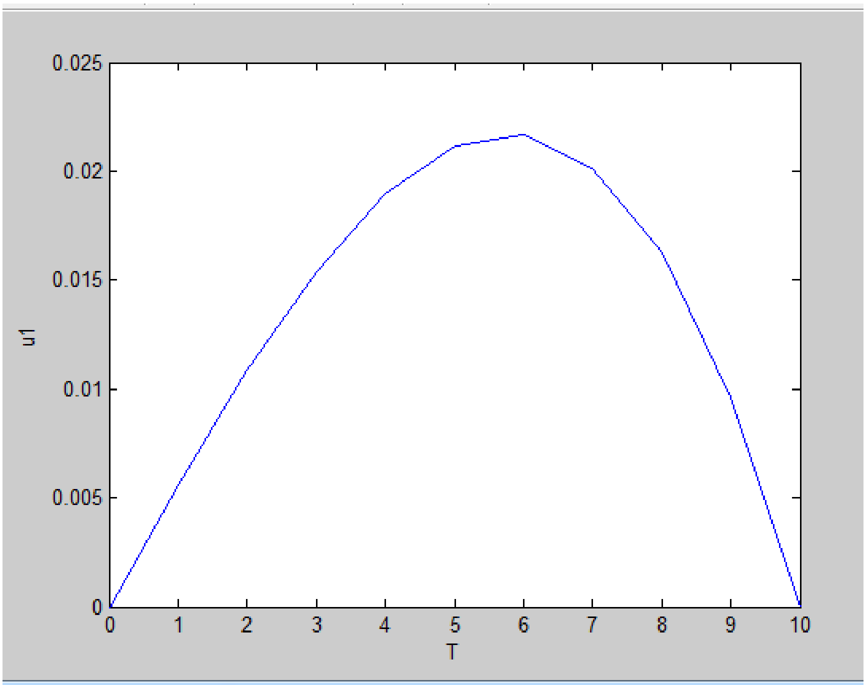

Рис.3. Изменение функции $u_1(t)$ на интервале [0, T].

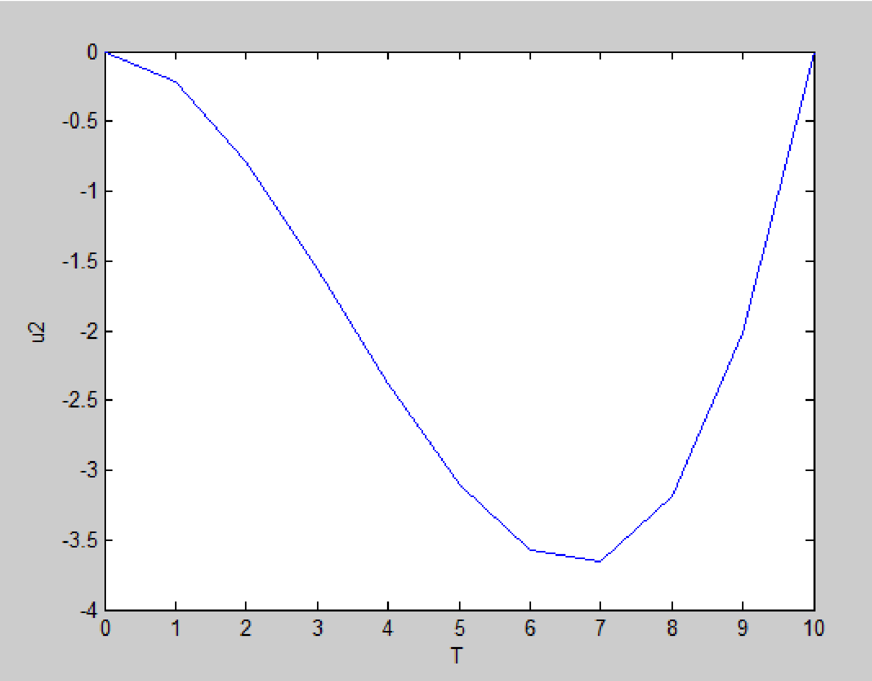

Рис.4. Изменение функции $u_2(t)$ на интервале [0, T].

6. Заключение.

В статье для определения оптимальных программных траекторий и управления при вертикальном движении квадрокоптера с использованием уравнений Эйлера-Лагранжа, предложен вычислительный алгоритм. Далее дана численная реализация и графики.

Авторы выражают огромную благодарность академику Фикрету Алиеву, за ценные советы.

Литература

1. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., Design of an optimal stationary controller, Izv. AN SSSR, Tekhnkibernetika, (1985), pp.143-151.

2. Aliev F.A., Guseinova N.S., Maharramov I.A., Mutallimov M.M., A new run algorithm for solving the continuous linear-quadratic optimal control problem with unseparated boundary conditions, Journal of Computer and Systems Sciences International, Vol.60, (2021), pp.48–55.
3. Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suntsev V.N.,Optimization of Linear Time-Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, (1978).
4. Aliev F.A., Larin V.B., On Control of the Spectrum of Linear Mechanical Systems, International Applied Mechanics, V.55, No.6, (2019), pp.654-659.
5. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems, Gordon & Breach Sci. Publ., (1998), 198 p.
6. Aliev F.A., Larin V.B., Tunik A.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Mirsaabov S.M., Problems of modeling in problems of development of algorithms for controlling spatial motion of quadrocopter, Proceedings of IAM, Vol.10, No.2, (2021), pp.96-112.
7. Aliev F.A., Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System, Élm, Baku, (1989).
8. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Huseynova N.Sh., Mathematical modeling and control of quadcopter motion, Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Vol.1, (2022), pp.81-83.
9. Aliev F.A., Optimization of discrete systems, Dokl. AN of Az. SSR, Vol.36, No.1, (1980).
10. Aliev F.A., Sushchenko O.A., Mutallimov M.M., Javadov N.G., Mammadov F.F., Maharramov R.R., Algorithm for quadcopter motion stabilization taking into account data of inertial navigation system, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.14, No.2, (2023), pp.278-289.
11. Aliev F.A., Velieva N.I., Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine, V.51, No.30, (2018), pp.323-330.
12. Aliev, F.A., Larin V.B., Stabilization Problems for a System with Output Feedback, Int. Appl. Mech., Vol.47, No.3, (2011), pp.3–49.
13. Beard R.W., McLain T.W., Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice, Princeton University Press, (2012).
14. Bryson, A., Ho, Yu.Sh., Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, (1972).
15. Castillo P., Lozano R., Dzul A., Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors, IEEE Control Systems Magazine. December, (2005), pp.45–55.
16. Larin V.B., Tunik A.A., Synthesis of the Quad-rotor Control Algorithms in the Basic Flight Modes, TWMS Journal of Pure and Appl. Math., Vol.9, No.2, (2018), pp.147 – 158.
17. Luukkonen T., Modelling and Control of Quadcopter, Aalto University, (2011), 26 p.

18. Maksudov F.G., Aliev F.A., Optimization of impulse systems with nonseparated boundary conditions, Doklady Akademii Nauk, Vol.280, No.4, (1985), pp.796-798.
19. Rinaldi F., Chiesa S., Quagliotti F. Linear Quadratic Control for Quadrotors UAVs Dynamics and Formation Flight. Journ. of Intell. Robot. Syst., No.70, (2013), pp.203–220.
20. Swee King Phang, Chenxiao Cai, Ben M. Chen, Tong Heng Lee, Design and Mathematical Modeling of a 4-Standard-Propeller (4SP) Quadrotor, Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, Beijing, China, (2012), pp.3270-3275.
21. Tunik A.A., Ilnitska S.I., Sushchenko O.A., Synthesis of Quadrotor Robust Guidance and Control System via Parameterization of all Stabilizing H-infinity– State-Feedback Gains, Electronics and Control Systems, Vol.62, No.4, (2019), pp.33-41.
22. Zare M., Sadeghi J., Farahat S., Regulating and Helix Path Tracking for Unmanned Aerial Vehicle (UAV) Using Fuzzy Logic Controllers, Journal of mathematics and computer science, Vol.13, (2014), pp.71-89.
23. Алиев Ф.А., Бордюг В.А., Ларин В.Б., Шабанов М.Б., Временные и Частотные Методы Синтеза Оптимальных Регуляторов, Инс-т физики АН Аз ССР, (1988).
24. Алиев Ф.А., Джавадов Г.Н., Муталлимов М.М., Проблемы стабилизации движением квадрокоптера по данным GPS, Доклады НАНА, Vol.79, No.1-2, (2023), pp.10-16.
25. Алиев Ф.А., Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными граничными условиями, Дифференц. уравнения, Vol.22, No.2, (1986), pp.345–347.
26. Алиев Ф.А., Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями, Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика, (1985), pp.138-146.
27. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Особые случаи в задачах оптимизации стационарных линейных систем, функционирующих по принципу обратной связи, Прикл. механика, Vol.39, (2003).
28. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Магеррамов И.А., Ханбабаева М.Г., Новый алгоритм прогонки решения линейной квадратичной задачи оптимизации с неразделенными двухточечными краевыми условиями, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.7, No.2, (2018), pp.142-152.
29. Гурьянов А.Е., Моделирование управления квадрокоптером, Инженерный вестник, No.8, (2014), сс.522-534.
30. Красовский А.Н., Суслова О.А., О математической модели управляемого движения дрона-квадрокоптера, Аграрный вестник Урала, No.4, (2016), сс.55–59.

31. Попов Н.И., Емельянова О.В., Яцун С.Ф., Моделирование динамики полета квадрокоптера, Вестник Воронежского Института ГПС МЧС России, Vol.4, No.13, (2014), сс.69-75.
32. Шилов К.Е., Разработка системы автоматического управления беспилотным летательным аппаратом мульти роторного типа, Труды Московского Физико-Технического Института, No.4, (2014), сс.139–152.

CONSTRUCTION OF OPTIMAL PROGRAM TRAJECTORIES AND CONTROLS FOR VERTICAL MOTION OF A QUADROCOPTER

N.S. Hajiyeva[1], M.M. Mutallimov[1]

[1]Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: nazile.m@mail.ru, mutallim@mail.ru

Abstract. In the paper the problem of defining the optimal program trajectories and controls for the vertical motion of quadcopter is considered. This problem is formulated as a linear quadratic optimal control problem with boundary conditions, where the Euler-Lagrange equations are used for solving the given problem. The results are illustrated with a concrete numerical example.

Keywords: unmanned aerial vehicle, quadcopter, mathematical model, Euler-Lagrange equations, optimal program trajectory, control, system of linear algebraic equations.

References

1. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., Design of an optimal stationary controller, Izv. AN SSSR, Tekhnkibernetika, (1985), pp.143-151.
2. Aliev F.A., Guseinova N.S., Maharramov I.A., Mutallimov M.M., A new run algorithm for solving the continuous linear-quadratic optimal control problem with unseparated boundary conditions, Journal of Computer and Systems Sciences International, Vol.60, (2021), pp.48–55.
3. Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suntsev V.N.,Optimization of Linear Time-Invariant Control Systems, Naukova Dumka, Kiev, (1978).
4. Aliev F.A., Larin V.B., On Control of the Spectrum of Linear Mechanical Systems, International Applied Mechanics, Vol.55, No.6, (2019), pp.654-659.

5. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems, Gordon & Breach Sci. Publ., (1998), 198 p.
6. Aliev F.A., Larin V.B., Tunik A.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Mirsaabov S.M., Problems of modeling in problems of development of algorithms for controlling spatial motion of quadrocopter, Proceedings of IAM, Vol.10, No.2, (2021), pp.96-112.
7. Aliev F.A., Methods to Solve Applied Problems of Optimization of Dynamic System, Élm, Baku, (1989).
8. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Huseynova N.Sh., Mathematical modeling and control of quadcopter motion, Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Vol.1, (2022), pp.81-83.
9. Aliev F.A., Optimization of discrete systems, Dokl. AN of Az. SSR, Vol.36, No.1, (1980).
10. Aliev F.A., Sushchenko O.A., Mutallimov M.M., Javadov N.G., Mammadov F.F., Maharramov R.R., Algorithm for quadcopter motion stabilization taking into account data of inertial navigation system, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol.14, No.2, (2023), pp.278-289.
11. Aliev F.A., Velieva N.I., Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine, V.51, No.30, (2018), pp.323-330.
12. Aliev, F.A., Larin V.B., Stabilization Problems for a System with Output Feedback, Int. Appl. Mech., Vol.47, No.3, (2011), pp.3–49.
13. Beard R.W., McLain T.W., Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice, Princeton University Press, (2012).
14. Bryson, A., Ho, Yu.Sh., Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, (1972).
15. Castillo P., Lozano R., Dzul A., Stabilization of a Mini Rotorcraft with Four Rotors, IEEE Control Systems Magazine. December, (2005), pp.45–55.
16. Larin V.B., Tunik A.A., Synthesis of the Quad-rotor Control Algorithms in the Basic Flight Modes, TWMS Journal of Pure and Appl. Math., Vol.9, No.2, (2018), pp.147 – 158.
17. Luukkonen T., Modelling and Control of Quadcopter, Aalto University, (2011), 26 p.
18. Maksudov F.G., Aliev F.A., Optimization of impulse systems with nonseparated boundary conditions, Doklady Akademii Nauk, Vol.280, No.4, (1985), pp.796-798.
19. Rinaldi F., Chiesa S., Quagliotti F. Linear Quadratic Control for Quadrotors UAVs Dynamics and Formation Flight. Journ. of Intell. Robot. Syst., No.70, (2013), pp.203–220.
20. Swee King Phang, Chenxiao Cai, Ben M. Chen, Tong Heng Lee, Design and Mathematical Modeling of a 4-Standard-Propeller (4SP) Quadrotor,

Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, Beijing, China, (2012), pp.3270-3275.

21. Tunik A.A., Ilnitska S.I., Sushchenko O.A., Synthesis of Quadrotor Robust Guidance and Control System via Parameterization of all Stabilizing H-infinity– State-Feedback Gains, Electronics and Control Systems, Vol.62, No.4, (2019), pp.33-41.
22. Zare M., Sadeghi J., Farahat S., Regulating and Helix Path Tracking for Unmanned Aerial Vehicle (UAV) Using Fuzzy Logic Controllers, Journal of mathematics and computer science, Vol.13, (2014), pp.71-89.
23. Aliev F.A.m Bordyug V.A., Larin V.B., Shabanov M.B., Vremenniye I Chastotniye Metodi Sinteza Optimalnikh Regulyatorov, Ins-t fiziki AN Az SSR, (1988). (Aliyev F.A., Bordyug V.A., Larin V.B., Shabanov M.B., Time and Frequency Methods of Synthesis of Optimal Regulators, Institute of Physics of the Academy of Sciences of the USSR, (1988).) (in Russian)
24. Aliev F.A., Djavadov G.N., Mutallimov M.M., Problemi stabilizatsii dvijeniyem kvadrokoptera po dannim GPS, Dokladi NANA, Vol.79, No.1-2, (2023), s.10-16. (Aliev F.A., Javadov G.N., Mutallimov M.M., Problems of stabilization by the movement of a quadcopter according to GPS data, Reports of ANAS, Vol.79, No.1-2, (2023), pp.10-16.) (in Russian)
25. Aliev F.A., Zadacha optimalnogo upravleniya lineynoy sistemoy s nerazdelennimi dvukhtotechnimi granichnimi usloviyami, Differents. Uravneniya, Vol.22, No.2, (1986), s.345–347. (Aliev F.A., Optimal control problem for a linear system with non-separated two-point boundary conditions, Differ. equations, Vol.22, No.2, (1986), pp.345–347.) (in Russian)
26. Aliev F.A., Zadacha optimizatsii s dvukhtotechnimi kraevimi usloviyami, izv. ANSSSR. Ser. tekhn. Kibernetika, (1985), s.138-146. (Aliev F.A., Optimization problem with two-point boundary conditions, Izv. Academy of Sciences of the USSR. Ser. tech. cybernetics, (1985), pp.138-146.) (in Russian)
27. Aliev F.A., Larin V.B., Osobiye sluchai v zadachakh optimizatsii statsionarnikh lineynikh sistem, funktsioniruyushikh po printsipu obratnoy svyazi, Prikl. Mekhanika, Vol.39, (2003). (Aliev F.A., Larin V.B., Special cases in optimization problems of stationary linear systems operating on the feedback principle, Appl. Mechanics, Vol.39, (2003).) (in Russian)
28. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Magerramov I.A., Khanbabayeva M.G., Noviy algoritm progonki resheniya lineynoy kvadratichnoy zadachi optimizatsii s nerazdelennimi dvukhtotechnimi kraevimi usloviyami, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.7, No.2, (2018), s.142-152. (Aliev F.A., Mutallimov M.M., Magerramov I.A., Khanbabaeva M.G., A new algorithm for running a solution to a linear quadratic optimization problem with non-separated two-point boundary conditions, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.7, No.2, (2018), pp.142-152.) (in Russian)

29. Guryanov A.E., Modelirovaniye upravleniya kvadrokopterom, Injenerniy vestnik, No.8, (2014), s.522-534. (Guryanov A.E., Modeling of quadcopter control, Engineering Bulletin, No.8, (2014), pp.522-534.) (in Russian)
30. Krasovskiy A.N., Suslova O.A., O matematicheskoy modeli upravlyayemogo dvijeniya drone-kvadrokoptera, Agrarniy vestnik Urala, No.4, (2016), s.55–59. (Krasovsky A.N., Suslova O.A., On the mathematical model of the controlled movement of a quadcopter drone, Agrarian Bulletin of the Urals, No.4, (2016), pp.55–59.) (in Russian)
31. Popov N.I., Emelyanova O.V., Yatsun S.F., Modelirovaniye dinamiki poleta kvadrokoptera, Vestnik Voronejskogo Instituta GPS MCC Rossii, Vol.4, No.13, (2014), s.69-75. (Popov N.I., Emelyanova O.V., Yatsun S.F., Modeling the flight dynamics of a quadcopter, Bulletin of the Voronezh Institute of the State Fire Service of the Ministry of Emergency Situations of Russia, Vol.4, No.13, (2014), pp.69-75.)(in Russian)
32. Shilov K.E., Razrabotka sistemi avtomaticheskogo upravleniya bespilotnim letatelnim apparatom multi rotornoogo tipa, Trudi Moskovskogo Fiziko-Tekhnicheskogo Instotuta, No.4, (2014), s.139–152. (Shilov K.E., Development of an automatic control system for an unmanned aerial vehicle of a multi-rotor type, Proceedings of the Moscow Institute of Physics and Technology, No.4, (2014), cc.139–152.) (in Russian)