Proceedings of IAM, V.5, N.1, 2016, pp.56-63

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ И ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕПРЕРЫВНО МЕНЯЮЩИМСЯ ПОРЯДКОМ ПРОИЗВОДНОЙ

Н.А. Алиев[1], Р.Г. Ахмедов[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: ahmadov_ramiz@hotmail.com

Резюме. В излагаемой работе рассматриваются как задача Коши так и граничная задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения непрерывно меняющиеся порядками производный с постоянными коэффициентами и определяются аналитические представления решений таких задач. Применяемый метод опирается на инвариант для приведенной выше производной, т.е. на функции, которые не меняются для производной любого вещественного положительного порядка.

Ключевые слова. Задача Коши, граничная задача, обобщенное обыкновенное дифференциальное уравнение.

AMS Subject Classification: 34B37.

1. Введение

В аддитивном анализе, как в дискретном [6,14], так и в непрерывном случае[17], хорошо исследованы различные задачи [1,10]. Не так обширно, но все же, исследованы как дискретные [5,9], так и непрерывные задачи для дифференциального уравнения с мультипликативными производными [4,7]. Для уравнений с частными производными, число начальных условий совпадает с порядком производной по времени рассматриваемого уравнения [15]. А, что касается граничных условий для уравнений с частными производными, то число нелокальных граничных условий (если граница области разбивается на две части) также совпадает с порядком производной по пространственным переменным [3].

Если рассматривать обыкновенное линейное дифференциальное уравнение дробного порядка, то тогда число условий связано не с порядком производной в рассматриваемом уравнении, а с шагом изменения порядка производной [2].

Мы здесь рассматриваем как задачу Коши, так и граничную задачу для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, где порядок производной в рассматриваемом уравнении меняется непрерывным образом, и при решении поставленной задачи мы будем опираться на инвариантную функцию

Впервые Эйлеру удалось построить инвариантную функцию e^x относительно обычной аддитивной производной. Далее он построил функцию $e^{\lambda x}$, с помощью которой обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами сопоставил некоторое алгебраическое уравнение (характеристическое уравнение), т.е. алгебраизовал дифференциальное уравнение [12].

Далее, с помощью функции Миттага-Леффлера построена функция инвариант для дробной производной [8,16].

В данной работе с помощью функции Вольтерра [13] строится инвариант для производной, порядок которой меняется непрерывным образом.

2. Уравнение и его общее решение

Введем в рассмотрение следующее уравнение:

$$\int_0^{\sqrt{2}} D^\alpha y(x) d\alpha = 0, \; x > a > 0, \tag{1}$$

где $\sqrt{2}$ -порядок рассматриваемого дифференциального уравнения (1), у которого порядок производной меняется непрерывным образом от нуля до $\sqrt{2}$.

Исходя из функции Вольтерра [13], рассмотрим следующую функцию, которая при $\lambda = 1$ является инвариантом для произвольного вещественного порядка:

$$h_{+0}(x, \lambda) = \int_{-1}^{\infty} \frac{x^\upsilon}{\upsilon!} \lambda^\upsilon d\upsilon, \tag{2}$$

где $\upsilon!$ при $\upsilon > -1$ определяется с помощью Γ (гамма) функции Эйлера [8] и предполагается , что $\upsilon! = \infty$, если

$$\upsilon \le -1. \tag{3}$$

Отметим, что функция (2) при $\lambda = 1$ является функцией Вольтерра, если интеграл начинается не от минус одного, а от нуля.

Теперь легко видеть, что для любого $0 < \alpha \in R$,

$$D^\alpha h_{+0}(x, \lambda) = \lambda^\alpha h_{+0}(x, \lambda) \,. \tag{4}$$

Тогда решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$y(x) = h_{+0}(x, \lambda). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (1) имеем:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \lambda^\alpha h_{+0}(x,\lambda) d\alpha = 0,$$

или же

$$\int_0^{\sqrt{2}} \lambda^\alpha d\alpha = 0. \tag{6}$$

Заметим, что уравнение (6) является обобщением многочлена, когда степень неизвестного меняется непрерывным образом.

Легко видеть, что вычисление интеграла характеристическое уравнение (6) приводит к виду:

$$\frac{\lambda^{\sqrt{2}} - 1}{\ln \lambda} = 0, \tag{7}$$

т.е.

$$\lambda_k = e^{\sqrt{2}k\pi i}, \quad k \in Z, \ k \neq 0. \tag{8}$$

Таким образом, учитывая (8) из (5) для общего решения уравнения (1) имеем:

$$y(x) = \sum_{\substack{k\in Z \\ k\neq 0}} c_k h_{+0}(x, \lambda_k), \tag{9}$$

где c_k -произвольные постоянные, а

$$h_{+0}(x,\lambda_k) = \int_{-1}^{\infty} \frac{x^\upsilon}{\upsilon!} \lambda_k{}^\upsilon d\upsilon, \quad k \in Z, \ k \neq 0, \tag{10}$$

частные решения уравнения (1).

3. Задача Коши

А теперь ,допустим, что для уравнения (1) рассматривается задача Коши со следующим начальным условием:

$$D^\alpha y(x)\big|_{x=a} = \varphi(\alpha), \quad \alpha \in [0, \sqrt{2}). \tag{11}$$

Для определения постоянных c_k, входящие в общее решение (9) подставляя общее решение (9) в начальном условии (11) получим:

$$\sum_{\substack{k\in Z \\ k\neq 0}} c_k e^{\sqrt{2}k\pi\alpha} h_{+0}(x, \lambda_k) = \varphi(\alpha), \quad \alpha \in [0, \sqrt{2}]. \tag{12}$$

Учитывая, что $e^{\sqrt{2}k\pi\alpha i}$ образуют ортогональную систему, при $\alpha \in [0, \sqrt{2}]$ т.е.

$$\int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}k\pi\alpha i} e^{\sqrt{2}n\pi\alpha i} d\alpha = \int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}(k+n)\pi\alpha i} d\alpha = \frac{e^{\sqrt{2}(k+n)\pi\alpha i}}{\sqrt{2}(k+n)\pi i}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{e^{2(k+n)\pi i}-1}{\sqrt{2}(k+n)\pi i} = \begin{cases} 0, & k+n \neq 0, \\ \sqrt{2}, & k+n=0. \end{cases} \tag{13}$$

Умножая (12) на $e^{-\sqrt{2}n\pi\alpha i}$ и интегрируя от нуля до $\sqrt{2}$ находим:

$$\sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} c_k h_{+0}(1,\lambda_k) \int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}k\pi\alpha i}\, e^{-\sqrt{2}n\pi\alpha i} d\alpha = \int_0^{\sqrt{2}} \varphi(\alpha) e^{-\sqrt{2}n\pi\alpha i} d\alpha,$$

или

$$\sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0\\ k\neq n}} c_k h_{+0}(1,\lambda_k) \frac{e^{2(k-n)\pi i}-1}{\sqrt{2}(k-n)\pi i} + c_n\, h_{+0}(1,\lambda_n)\sqrt{2} = \int_0^{\sqrt{2}} \varphi(\alpha) e^{-\sqrt{2}n\pi\alpha i} d\alpha\,,$$

или же учитывая (13) имеем:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2}h_{+0}(1,\lambda_n)} \int_0^{\sqrt{2}} \varphi(\alpha) e^{-\sqrt{2}n\pi\alpha i} d\alpha\,, \quad n\in Z\,, \quad n\neq 0\,. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (9), определяем решение задачи Коши (1),(11) в виде:

$$y(x) = \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} \frac{h_{+0}(x,\lambda_k)}{\sqrt{2}h_{+0}(1,\lambda_k)} \int_0^{\sqrt{2}} \varphi(\alpha) e^{-\sqrt{2}k\pi\alpha i} d\alpha\,. \tag{15}$$

Таким образом, установлена следующая

Теорема. Пусть $\varphi(\alpha)$ – непрерывная функция, тогда задача (1),(11) имеет решение и оно представимо в виде (15).

4. Граничная задача

А теперь рассмотрим уравнение (1) на (a,b) с граничным условием:

$$a_0 D^\alpha y(x)\big|_{x=a} + b_0 D^\alpha y(x)\big|_{x=b} = \varphi(\alpha)\,,\ \ \alpha\in[0,\sqrt{2}]\,, \tag{16}$$

где $\sqrt{2}$ -порядок дифференциального уравнения (1), a_0, b_0 -постоянные, а- $\varphi(\alpha)$ заданная вещественнозначная гладкая функция.

В этом случае, т.е. при рассмотрении граничной задачи произвольные постоянные c_k, входящие в общее решение (9) определяются подстановкой (9) в граничное условие (16). После такой подстановки мы получим:

$$a_0 \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} c_k D^\alpha y_k(x)\big|_{x=a} + b_0 \sum_{\substack{k\in Z\\ k\neq 0}} c_k D^\alpha y_k(x)\big|_{x=b} = \varphi(\alpha),$$

или

$$\sum_{\substack{k\in Z\\k\neq 0}} c_k \lambda_k^{\alpha}[a_0\ h_{+0}(a,\lambda_k)+b_0 h_{+0}(b,\lambda_k)]=\varphi(\alpha.) \qquad (17)$$

Исходя из (8) рассмотрим функции

$$\lambda^{\alpha}{}_k = e^{\sqrt{2}k\pi\alpha i}, \qquad k\in Z,\ k\neq 0, \quad \alpha\in[0,\sqrt{2}) \qquad (18)$$

Легко видеть, что при $k\neq m$

$$(\lambda_k^{\alpha},\lambda_m^{\alpha})=\int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}k\pi\alpha i}e^{-\sqrt{2}n\pi\alpha i}d\alpha=\int_0^{\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}(k-m)\pi\alpha i}d\alpha=\frac{e^{\sqrt{2}(k-m)\pi\alpha i}}{\sqrt{2}(k-m)\pi i}\Big|_{\alpha=0}^{\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{e^{2(k-m)\pi\alpha i}-1}{\sqrt{2}(k-m)\pi i}=0,$$

и

$$(\lambda_m^{\alpha},\lambda_m^{\alpha})=\sqrt{2},$$

т.е. функции (18) являются ортогональными.

Тогда возвращаясь к (17) имеем:

$$\sum_{\substack{k\in Z\\k\neq 0}} c_k[a_0\ h_{+0}(a,\lambda_k)+b_0 h_{+0}(b,\lambda_k)]\int_0^{\sqrt{2}}\lambda_k^{\alpha}\lambda_{-m}^{\alpha}d\alpha=\int_0^{\sqrt{2}}\varphi(\alpha)\lambda_{-m}^{\alpha}d\alpha,$$

или

$$c_m\sqrt{2}[a_0 h_{+0}(a,\lambda_m)+b_0 h_{+0}(b,\lambda_m)]=\int_0^{\sqrt{2}}\varphi(\alpha)\lambda_{-m}^{\alpha}d\alpha, \qquad (19)$$

или же, если

$$a_0 h_{+0}(a,\lambda_m)+b_0 h_{+0}(b,\lambda_m)\neq 0,\ m\in Z,\ \ m\neq 0, \qquad (20)$$

то из (19) получим:

$$c_m=\frac{\int_0^{\sqrt{2}}\varphi(\alpha)\lambda_{-m}^{\alpha}d\alpha,}{\sqrt{2}[a_0 h_{+0}(a,\lambda_m)+b_0 h_{+0}(b,\lambda_m)]},\ m\in Z,\ \ m\neq 0 \qquad (21)$$

Подставляя полученные в (21) постоянные c_m в (9) получим решение задачи (1),(16) в виде:

$$y(x)=\sum_{\substack{k\in Z\\k\neq 0}}\frac{\int_0^{\sqrt{2}}\varphi(\alpha)\lambda_{-m}^{\alpha}d\alpha,}{\sqrt{2}[a_0 h_{+0}(a,\lambda_m)+b_0 h_{+0}(b,\lambda_m)]}h_{+0}(x,\lambda_k), \quad x\in[a,b]. \quad (22)$$

И так, для рассматриваемой граничной задачи (1),(16) установлена следующая

Теорема. Если $0 < \alpha < b,$ a_0, b_0 -заданные числа, $\varphi(\alpha)$ -непрерывная вещевственная функция и справедливо условие (20) , то решение граничной задачи (1),(16) существует и оно представимо в виде (22).

Замечание. Случай когда коэффициенты граничного условия (16) a_0, b_0 являются функциями переменного α остается открытым.

Литература

1. Aliev N.A., Bagirov G., Izadi F.A., Discrete Additive Analysis, Tarbiat Moallem Universitety publishers, Tabriz, Iran, 1993, 220 p.
2. Aliyev N., Pashavand A.A., Boundary value problem for a fractional order ordinary linear differential equation with a constant coefficient, Proceedings of IAM, Vol.4, No.1, 2015, pp.3-7.
3. Bahrami F., Aliyev N., Hosseini S.M., A method for the reduction of four dimentional mixed problems with general boundary conditions to a system of second kind Fredholm integral equations, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, No.17, 2005, pp.91-104.
4. Bashirov A.E., Kurpinar E.M., Özyapici A., Multiplikative calculus and its applications, J. Math. Anal., 2008, 337 p., pp.36-48.
5. Hassani O. L., Aliev N., Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations, International Mathematical Forum Journal for Theory and Applications, 33-36, Vol.l 3, 2008, pp.1623-1631.
6. Izadi F.A., Aliev N. A., Bagirov G., Discrete Calculus by Analogy, 2009, 154 p.
7. Luc Florack, Hans van Assen, Multiplikative Calculus in Biomedical İmage Analysis, J. Math. İmaging vis Published online, 2011, 12 p.
8. Mittaq-Leffler G., Acta Math., 1905, Vol.29, pp.81-101.
9. M. Jahansahi, A. Ahmadkhanlu, N. Aliev, M. Fatemi, Discrete Additive and Multiplicative Differentiation and Integration and their Invariant Functions Journal of Contemporary Applied Mathematics, Vol.1, No.1, 2011, pp.28-35.
10. Алиев Н.А., Разложение матриц-функций по решениям спектральной задачи. Дифференциальные уравнения, т.2, №6, 1966, стр.847-852.
11. Андре Анго, Математика для Электро и Радиоинженеров, Наука, Москва, 1967, 778 с.
12. Арнольд В.И. Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, Наука, Москва, 1971, 239 с.

13. Вольтерра В., Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, Наука, Москва, 1982, 304 с.
14. Гельфонд А.О. , Исчисление конечных разностей, Наука, Москва, 1967, 375 с.
15. Курант Р., Уравнения с частными производными, Мир, Москва, 1964, 830 с.
16. Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И., Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск, Наука и техника, 1987, 687 с.
17. Трикоми Ф., Дифференциальные уравнения, ИЛ, Москва, 1962, 349 с.

Törəməsinin tərtibi kəsilməz dəyişən adi törəməli differensial tənlik üçün qoyulmuş Koşi məsələsinin və sərhəd məsəsləsinin həllərinin araşdırılması

N.Ə. Əliyev, R.H. Əhmədov

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə adi, sabit əmsallı, xətti bircins differensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələsiniə baxılmış və onların həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Qeyd edək ki, müasir riyaziyyatın çox az öyrənilmiş bu sahəsində additiv və multiplikativ törəməli tənliklərə uyğun məsələlərin həlli üçün məlum olan effektiv üsullara analoji üsullar hələ də mövcud deyildir.

Burada tətbiq olunan üsul yuxarıda qeyd olunan törəməyə nəzərən invariant funksiyaya, yəni ixtiyari həqiqi müsbət tərtib törəməsi özünə bərabər olan funksiyadan istifadə olunmasına əsaslanır.

Açar sözlər: Koşi məsələsi**,** sərhəd məsələsi, ümumiləşmiş adi differensial tənlik

Investigation of the solutions to Cauchy and boundery value problems for an ordinary differential equation with continuously changing order of the derivative

N.A. Aliyev, R.H. Akhmedov

ABSTRACT

In the stated paper there are considered initial and boundary value problems for such a kind of ordinary linear differential equation with constant coefficients and there are defined analytical representatious of the solution to these problems.

It should be noted that this field is one of the poorly investigated fields of the modern mathematics and yet there are no such effective methods for the investigation of the problems for such differential equations similar to how the problems for differential equations both with the additive and multiplicative derivatives are investigated.

The applied method is based on the invariant for the above mentioned derivative, i.e. on the functions which don't change for the derivative of any real-valued positive order.

Keywords: Cauchy problem, boundary problem, generalized ODE.