Proceedings of IAM, V.9, N.2, 2020, pp.109-118

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

С.С.Мирзоев[1], Л.А.Рустамова[1]
[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: mirzoyevsabir@mail.ru, lam1488@yandex.ru

Абстракт. В работе получены условия разрешимости одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка с переменным коэффициентом. Эти условия выражены только свойствами коэффициентов операторно-дифференциального уравнения.

Ключевые слова: Гильбертово пространство, нормальный оператор, регулярно разрешимый, операторно-дифференциальное уравнение.

AMS Subject Classification: 34B40, 35J25, 47D03.

1. Введение.

Пусть H-сепарабельное гильбертово пространство, а оператор A нормальный с вполне непрерывном обратным оператором A^{-1}, спектр которого содержится в угловом секторе

$$\Lambda_{\varepsilon} = \{\lambda : |\arg\lambda| < \varepsilon\} \quad , \quad 0 \le \varepsilon < \pi/2 .$$

В этом случае оператор A имеет полную систему собственных векторов $\{e_k\}$ $Ae_k = \mu_k e_k$, $k = 1,2,....$ Тогда оператор A можно представить в виде $A = UC,$ где, $D(A) = D(C), D(U) = H$ и

$$Cx = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| (x, e_k) e_k , \quad U = \sum_{k=1}^{\infty} e^{i\varphi_k} (y, e_k) e_k ,$$

$$\text{при } x \in D(A), \ \ y \in H , \ \ \varphi_k = \arg\mu_k , \ \ k = 1,2,... .$$

Очевидно, что C - положительно определённый самосопряженный оператор, а U - унитарный оператор в H .

Обозначим через H_γ $(\gamma \ge 0)$ гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y),\ H_0 = H, (x, y)_0 = (x, y)$.

Пусть $L_2(R_+; H)$ есть гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$, определённых в интервале $R_+ = (0, +\infty)$ почти всюду, со значением в H и с нормой

$$\|f\|_{L_2(R_+;H)}=\left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt\right)^{1/2}<\infty.$$

Далее введем гильбертово пространство [5]

$$W_2^2(R_+;H)=\{u:\quad C^2u\in L_2(R_+;H),\ u''(t)\in L_2(R_+;H)\ \}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}=\left(\|C^2u\|^2_{L_2(R_+;H)}+\|u''\|^2_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Очевидно, что из теоремы о следах [5]

$$\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)=\{u\mid u\in W_2^2(R_+;H),\ u(0)=0\ \}$$

есть полное подпространство пространства $W_2^2(R_+;H)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве H краевую задачу

$$-u''(t)+\rho(t)A^2u(t)+A_1u'(t)+A_2u(t)=f(t),\qquad t\in R_+, \tag{1}$$

$$u(0)=0\ , \tag{2}$$

где $f(t), u(t)$ - вектор-функции, определённые в R_+ почти всюду со значениями в H, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A - нормальный оператор с вполне непрерывным обратным, спектр которого содержится в угловом секторе Λ_ε, $\left(0\le\varepsilon<\pi/2\right)$;

2) $\rho(t)$ - измеримая скалярная функция, определённая в R_+ почти всюду, причем $0<\alpha\le\rho(t)<\beta<\infty$;

3) A_1, A_2 линейные операторы, причем $B_1=A_1A^{-1}$, $B_2=A_2A^{-2}$ ограничены в H.

Определение 1. Если вектор-функция $u(t)\in W_2^2(R_+;H)$ удовлетворяет уравнению (1) почти всюду, то $u(t)$ называется регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t)\in L_2(R_+;H)$ существует регулярное решение уравнение (1) $u(t)$, которое удовлетворяет краевой задаче в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t)\|_{H_{3/2}}=0$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}\le const\|f\|_{L_2(R_+;H)},$$

то задача называется регулярно разрешимой.

В данной работе мы найдём условия регулярной разрешимости задачи (1), (2), выраженные свойствами 1), 2) коэффициентов уравнения (1).

Отметим, что задача (1), (2) исследована в случае $\rho(t)=\alpha$, при $t\in(0,t_0)$, $\rho(t)=\beta$, при $t\in(t_0,\infty)$, $t_0\in(0,\infty)$ в работах [1-4, 6, 7], когда A нормальный или самосопряженный положительный оператор. В этой работе мы применим другой метод для разрешимости задачи (1),(2).

2.Основные результаты.

Сперва в пространстве $L_2((0,\infty);H)$ определим оператор

$$L_0u=-u''(t)+\rho(t)A^2u(t)$$

с областью определения $D(L_0)=\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$.

Очевидно, что сопряженный оператор будет

$$L_0^*u=-u''(t)+\rho(t)A^{*2}u(t)\quad,\qquad D(L_0^*)=D(L_0)=\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H).$$

Сперва докажем одну вспомогательному лемму, которая показывает почему $0\le\varepsilon\le\pi/2$.

Лемма 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда вектор-функция $u(t)=e^{-tA}\varphi$ принадлежит пространству $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ тогда и только тогда, когда $\varphi\in H_{3/2}$. Здесь e^{-tA} есть полугруппа ограниченных операторов, порожденных оператором $(-A)$.

Доказательство. Пусть $u(t)=e^{-tA}\varphi\in\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$. Тогда по теореме о следах [1] следует, что $u(0)=e^{-tA}\varphi\big|_{t=0}=\varphi\in H_{3/2}$. Обратно, пусть $\varphi\in H_{3/2}$. Тогда

$$\|u\|^2_{W_2^2(R_+;H)}=\left\|C^2e^{-tA}\varphi\right\|^2_{L_2(R_+;H)}+\left\|A^2e^{-tA}\varphi\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=2\left\|C^2e^{-tA}\varphi\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Если $\varphi\in H_{3/2}$, то существует вектор-функция $x\in H$, такая, что $x=C^{3/2}\varphi$. Поэтому

$$\|u\|^2_{W_2^2(R_+;H)}=2\left\|C^{1/2}e^{-tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Далее, используя спектральное разложение оператора A, имеем

$$\left\|C^{1/2}e^{-tA}x\right\|^2_{L_2(R_+;H)}=\left(C^{1/2}e^{-tA}x,C^{1/2}e^{-tA}x\right)_{L_2(R_+;H)}=$$

$$=\int_0^\infty\sum_{k=1}^\infty|\mu_k|e^{-2\operatorname{Re}\mu_kt}\left|(x,e_k)\right|^2=\sum_{k=1}^\infty|\mu_k|\left|(x,e_k)\right|^2\int_0^\infty e^{-2\operatorname{Re}\mu_kt}dt=$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k| |(x, e_k)|^2 \frac{1}{2|\mu_k| \cos\varphi_k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\cos\varepsilon} |(x, e_k)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\cos\varepsilon} \|x\|^2 = \frac{1}{2\cos\varepsilon} \|\varphi\|^2_{3/2},$$

т.е. $u(t) = e^{-tA}\varphi \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H)$.

Имеет место

Теорема 1. При всех $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H)$ имеют место неравенства

$$\|A^2 u\|_{L_2(R_+;H)} \le d_0(\varepsilon) \|L_0 u\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{3}$$

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \le d_1(\varepsilon) \|L_0 u\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{4}$$

$$\|u''\|_{L_2(R_+;H)} \le d_2(\varepsilon) \|L_0 u\|_{L_2(R_+;H)}, \tag{5}$$

$$d_0(\varepsilon) = \frac{1}{\alpha} \begin{cases} 1\,, & 0 \le \varepsilon \le \pi/4\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2\,, \end{cases}$$

$$d_1(\varepsilon) = \alpha^{-1/2} \frac{1}{2\cos\varepsilon};$$

$$d_2(\varepsilon) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} \begin{cases} 1, & 0 \le \varepsilon \le \pi/4\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}, & \pi/4 \le \varepsilon < \pi/2. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+; H)$ и $L_0 u = f$. Тогда, умножая уравнения

$$-u''(t) + \rho(t) A^2 u(t) = f(t) \tag{6}$$

на функцию $\rho^{-1/2}(t)$, получаем

$$\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|-\rho^{-1/2} u'' + \rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \left\|\rho^{-1/2} u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - 2\,\mathrm{Re}(u''; A^2 u)_{L_2(R_+;H)}\,. \tag{7}$$

Далее, учитывая что $u(0) = 0$, интегрируя по частям получаем

$$-\left(u''(t), A^2u(t)\right)_{L_2(R_+;H)} = -\int_0^\infty \left(u''(t), A^2u(t)\right) =$$

$$= \int_0^\infty \left(A^*u'(t), A^2u(t)\right)dt = \left(A^*u', A^2u\right)_{L_2(R_+;H)}.$$

Затем, используя спектральное разложения оператора A получаем, что

$$2\operatorname{Re}\left(A^*u', Au'\right) \geq 2\cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Таким образом, из неравенства (7) следует, что

$$\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \geq \left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2\cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \quad (8)$$

С другой стороны

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|Cu'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left(Cu'; Cu'\right)_{L_2(R_+;H)}.$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\left(Cu', Cu'\right)_{L_2(R_+;H)} = \int_0^\infty \left(Cu'(t), Cu'(t)\right)dt = -\int_0^\infty \left(C^2u''(t), u''(t)\right)dt =$$

$$= -\left(C^2u', u''\right)_{L_2(R_+;H)} = -\left(\rho^{1/2}C^2u', \rho^{-1/2}u'\right)_{L_2(R_+;H)} \leq$$

$$= \left\|\rho^{1/2}C^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2}C^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Таким образом

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{2}\left(\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2}C^2u'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}\right).$$

Учитывая это неравенство в неравенстве (8), получаем:

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{2}\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Учитывая, что $\left\|Au'\right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\|Cu'\right\|_{L_2(R_+;H)}$, имеем

$$\left(1 + \cos 2\varepsilon\right)\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{2}\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)},$$

т.е.

$$2\cos^2 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{2}\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

А это значит, что

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{4\cos^2 \varepsilon}\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Следовательно,

$$\left\|Au'\right\|_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{1}{2\cos \varepsilon}\left\|\rho^{-1/2} f\right\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\alpha^{-1/2}\|f\|_{L_2(R_+;H)}. \tag{9}$$

Т.е. при все $0 \le \varepsilon < \pi/2$

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\alpha^{-1/2}\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Таким образом,

$$\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} \le \frac{1}{2\cos\varepsilon}\alpha^{-1/2}\|L_0u\|_{L_2(R_+;H)} = d_1(\varepsilon)\|L_0u\|_{L_2(R_+;H)} \tag{10}$$

Для доказательства остальных неравенств рассмотрим два случая:

а) $0 \le \varepsilon \le \pi/4$. В этом случае $\cos 2\varepsilon \ge 0,$ поэтому из неравенства (8) следует, что

$$\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \left\|\rho^{-1/2}f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Тогда очевидно, что

$$\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \left\|\rho^{-1/2}f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}.$$

Отсюда имеем, что

$$\|A^2u\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1}\left\|\rho^{1/2}A^2u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \alpha^{-1}\left\|\rho^{-1/2}f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-2}\|f\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

т.е. при $0 \le \varepsilon \le \pi/4$

$$\|A^2u\|_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1}\|f\|_{L_2(R_+;H)} = \alpha^{-1}\|L_0u\|_{L_2(R_+;H)}. \tag{11}$$

В этом случае аналогично имеем:

$$\|u''\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \beta\left\|\rho^{-1/2}u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \beta\alpha^{-1}\|f\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \beta\alpha^{-1}\|L_0u\|^2_{L_2(R_+;H)},$$

т.е.

$$\|u''\|_{L_2(R_+;H)} \le \beta^{1/2}\alpha^{-1/2}\|L_0u\|_{L_2(R_+;H)}. \tag{12}$$

Теперь рассмотрим случай $\pi/4 \le \varepsilon < \pi/2$. В этом случае $\cos 2\varepsilon < 0.$ Тогда из неравенства (8) с учётом неравенства (10), получаем:

$$\left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge \left\|\rho^{-1/2} u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + 2\cos 2\varepsilon \left\|Au'\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+\left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \ge \left\|\rho^{-1/2} u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \frac{2\cos 2\varepsilon}{4\alpha\cos^2\varepsilon}\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} +$$

$$+\left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \tag{13}$$

Таким образом,

$$\left\|\rho^{-1/2} u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} + \left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \left\|\rho^{-1/2} f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} - \frac{\cos 2\varepsilon}{2\alpha\cos^2\varepsilon}\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \alpha^{-1}\left\| f\right\|_{L_2(R_+;H)} - \frac{\cos 2\varepsilon}{2\alpha\cos^2\varepsilon}\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \alpha^{-1}\left(1-\frac{\cos 2\varepsilon}{2\cos^2\varepsilon}\right)\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)} =$$

$$= \alpha^{-1}\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}. \tag{14}$$

Из неравенства (14) получаем, что

$$\left\|A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1}\left\|\rho^{1/2} A^2 u\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \alpha^{-2}\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

т.е.

$$\left\|A^2 u\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \alpha^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\| f\right\|_{L_2(R_+;H)} = \alpha^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\|L_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)}. \tag{15}$$

Аналогично имеем

$$\left\|u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} = \left\|\rho^{-1/2}\rho^{1/2} u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le \beta\left\|\rho^{-1/2} u''\right\|^2_{L_2(R_+;H)} \le$$

$$\le \beta\alpha^{-1}\frac{1}{2\cos^2\varepsilon}\left\| f\right\|^2_{L_2(R_+;H)}$$

т.е.

$$\left\|u''\right\|_{L_2(R_+;H)} \le \beta^{1/2}\alpha^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\varepsilon}\left\|L_0 u\right\|_{L_2(R_+;H)}. \tag{16}$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. $KerL_0 = \{0\}$. Действительно если $f = 0$, то $A^2 u = 0$, т.е. $u = 0$.

Так как A^* имеет те же свойства оператора A, то получаем, что $KerL_0^* = \{0\}$. Далее, из теоремы 1 получаем

Теорема 2. Оператор L_0 изоморфно отображает $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ на $L_2(R_+;H)$

Доказательство. Из следствия 1 следует, что $KerL_0 = \{0\}$. С другой стороны $KerL_0^* = \{0\}$, то $\operatorname{Im} L_0$ всюду плотно в $L_2(R_+;H)$. Из теоремы 1 следует, что

$$\|L_0 u\|_{L_2(R_+;H)} \ge const\|u\|_{L_2(R_+;H)} \quad (L_0 u = f).$$

С другой стороны, очевидно, что при $u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ имеет место неравенство

$$\|L_0 u\|_{L_2(R_+;H)} \le \sqrt{2}\max\{1,\ \beta\}\|u\|_{W_2^2(R_+;H)}.$$

Из этих двух неравенств следует, что
$\operatorname{Im} L_0 = L_2(R_+;H)$. Теорема доказана.

Теперь докажем основную теорему

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)-3) и операторы $B_1 = A_1 A^{-1}$, $B_2 = A_2 A^{-2}$ такие что

$$q(\varepsilon) = d_1(\varepsilon)\|B_1\| + d_2(\varepsilon)\|B_2\| < 1,$$

то задача (1),(2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем уравнение (1),(2) в виде

$$(L_0 + L_1)u = f\ ,$$

где $L_1 = A_1 u' + A_2 u,\ \ u \in \overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H),\ \ f(t) \in L_2(R_+;H)$. Так как L_0 изоморфизм между пространствами $\overset{o}{W}{}_2^2(R_+;H)$ и $L_2(R_+;H)$, то L_0^{-1} существует и ограничен. После замены $L_0 u = \vartheta$ мы получаем уравнение

$$(E + L_1 L_0^{-1})\vartheta = f$$

в $L_2(R_+;H)$. Но с другой стороны, с учетом теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned}
&\|L_0 L_0^{-1}\vartheta\|_{L_2(R_+;H)} = \|L_1 u\|_{L_2(R_+;H)} = \|A_1 u' + A_2 u\|_{L_2(R_+;H)} \le \\
&\le \|B_1\|\|Au'\|_{L_2(R_+;H)} + \|B_2\|\|A^2 u\|_{L_2(R_+;H)} \le \\
&\le \|B_1\| d_1(\varepsilon)\|L_0 u\| + \|B_2\| d_2(\varepsilon)\|L_0 u\| = q(\varepsilon)\|L_0 u\| = \\
&= q(\varepsilon)\|\vartheta\|_{L_2(R_+;H)}.
\end{aligned}$$

Так как $q(\varepsilon) < 1,$ то $u = L_0^{-1}(E + L_1 L_0^{-1})^{-1} f$ и

$$\|u\|_{W_2^2(R_+;H)} \le const\|f\|_{L_2(R_+;H)}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mirzoev S.S. , Aliev A.R., Rustamova L.A. On the Boundary Value Problem with the Operator in Boundary Conditions for the Operator-Differential Equation of Second Order with Discontinuous Coefficients, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, V.9, 2013, pp. 207-226.
2. Mirzoev S.S., and Rustamova L.A., On solvability of one boundary-value problem for second order operator-differential equations with discontinuous coefficient, Appl. Comput. Math., V.5, N.2, 2006, pp.191–200.
3. Rustamova L.A. On some second order operator-differential equations with discontinuous coefficients, NA of scien of Azerbaijan Proceedings of Institute of Math. and mech., V. XXIV(XXXII), 2006, Baku, pp.179-186.
4. Алиев А.Р. Краевые задачи для одного класса операторно дифференциального уравнений второго порядка с переменными коэффициентом, Мат. заметки, V.34, N.6, 2003, сс. 803-817.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, М.: Мир, 1971, 371 с.
6. Мирзоев С.С., Алиев А.Р. К теории разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений высокого по-рядка, Функциональный анализ и его приложения, V.44, N.3, 2010, сс. 63-65.
7. Мирзоев С.С., Алиев А.Р., Рустамова Л.А. Об условиях разреши-мости краевой задачи для эллиптического операторно-дифферен-циального уравнения с разрывным коэффициентом, Математические заметки (Mathematical Notes), V.8, N.4, 2012, сс. 789-793.

ON SOLVABILITY OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SECOND ORDER OPERATOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

S.S.Mirzoev[1], L.A.Rustamova[1]

[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan

e-mail: mirzoyevsabir@mail.ru, lam1488@yandex.ru

ABSTRACT

In the work the conditions on coefficients of one class of a boundary value problem for second-order operator-differential equations of elliptic type with variable coefficients are obtained, which provide solvability of the given problem. Note that before this work scalar function took only two positive values. In this work this coefficient can take any positive value.

Keywords: Hilbert Space, Normal Operator, Operator-Differential Equation, Regular Solvability.

REFERENCES

1. Mirzoev S.S., Aliev A.R., Rustamova L.A., On the boundary value problem with the operator in boundary conditions for the operator-differential equation of second order with discontinuous coefficients, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, V.9, 2013, pp.207-226.
2. Mirzoev S.S., Rustamova L.A., On solvability of one boundary-value problem for second order operator-differential equations with discontinuous coefficient, Appl. Comput. Math., V.5, 2006, pp.191-200.
3. Rustamova L.A., On some second order operator-differential equations with discontinuous coefficients, Proceedings of Institute of Math. and Mech., Baku, V.XXIV(XXXII), 2006, pp.179-186.
4. Aliev A.R. Kraevye zadachi dlya odnogo klassa operatorno differentsial'nogo uravneniy vtorogo poryadka s peremennymi koeffitsientom, Mat. zametki, V.34, N.6, 2003, sc. 803-817. (Aliev A.R., Boundary-value problems for a class of operator differential equations of high order with variable coefficients, Mathematical Notes, V.74, 2003, pp.761-771).
5. Lions Zh.-L., Madzhenes E. Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya, M.: Mir, 1971, 371 s.(Lions J.-L., Majenes E., Nonhomogeneous boundary- Value Problems and their Applications, M., Mir, 1971).
6. Mirzoev S.S., Aliev A.R. K teorii razreshimosti kraevykh zadach dlya odnogo klassa operatorno-differentsial'nykh uravneniy vysokogo po-ryadka, Funktsional'nyy analiz i ego prilozheniya, V.44, N.3, 2010, sc. 63-65(Mirzoev S.S., Aliev A.R., On boundary value problem solvability theory for a class of high-order operator-differential equations, Functional Analysis and its Applications, V.44, N.3, 2010, pp. 63-65).
7. Mirzoev S.S., Aliev A.R., Rustamova L.A. Ob usloviyakh razreshi-mosti kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo operatorno-differen-tsial'nogo uravneniya s razryvnym koeffitsientom, Matematicheskie zametki (Mathematical Notes), V.8, N.4, 2012, sc. 789-793 (Mirzoyev S.S., Aliev A.R., Rustamova L.A., Solvability conditions for boundary-value problems for elliptic operator-differential equations with discontinuous coefficient, Mat. Zametki, V.92, 2012, pp.789-793).