Proceedings of IAM, V.9, N.2, 2020, pp.138-147

МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКИМИ ДЕМПФЕРАМИ

И.С.Магаррамов[1] , А.Г.Джафаров[3] , Н.А.Алиев[1], Фикрет А.Алиев[1,2]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2] Институт Информционных Технологии НАН Азербаайджан
[3] Азербайджанский Педагогический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Абстракт. Рассматриваются колебательные системы с жидкими демпферами, где движение описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением дробного производного в подчиненном члене. Принимая дробное производное рациональным числом, с помощью шагом его знаменателя исходное операторное уравнение впервые сводится к нормальной системе из дифференциальных уравнений подобно классическому случаю. Показывается, что общее решение полученной системы зависит от произвольных постоянных, которые определяются с помощью заданных периодических граничных условий. Результаты иллюстрируются построением периодических решений для одного простого уравнения дробного порядка.
Ключевые слова: колебательные системы, жидкий демпфер, производное дробного порядка,нормальная система, периодическое решение.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение:

В последнее время много внимания уделяется решениюдифференциальных уравнений дробного порядка [1-7, 10, 12, 14-16] из за того, что они более адекватно описывают математическую модель для разных конкретных практических задач из нефтяной промышленности [7], для добычи нефти, разных проблем металлургической индустрии [17].

В основном в этих работах математические модели соответствующих задач опираются на уравнения колебательных систем с жидкими демпферами, описывающие движение операторным дифференциальным уравнением дробного порядка с подчиненным членом. Исследование этих уравнений в общем случае сводится к уравнению вещественного порядка, которое в работах [3, 6, 810], приближенно сводится с достаточной точностью к уравнению с рациональным порядком. Возникают вопросы: нельзя ли используя свойства рациональности порядка производное свестисистему уравнений к нормальному виду [9] и далее использовать идеи классических подходов для исследования соответствующих математических моделей, т.е. рассматривать построение программных траекторий и управлений, регуляторов, около соответствующих траекторий и управлений, определение порядкадробных производных и т.п.

В данной работе исследуется операторное дифференциальное уравнение рационального дробного порядка в подчиненном члене,которое описывает колебательные системы с жидкими демпферами. Принимая дробный порядок в виде $\frac{p}{q}$ (p и q -натуральные числа) с шагом $\frac{1}{q}$ исходное уравнение сводится к нормальной системе из $2q$уравнений, решения которых зависят от $2q$ произвольных постоянных, определяемых из заданных $2q$ периодических граничный условий. Отметим, что эту схему можно развивать для любого линейного граничного условия общего вида. Результаты иллюстрируются для конкретных примеров нахождения периодических решений.

2. Постановка задачи

Пусть имеется уравнение

$$y''(t) + aD^{\alpha}y(t) + by(t) = f(t), t\epsilon(t_0, T) \quad , \quad (1)$$

описывающее движение колебательных систем с жидкими демпферами [4, 7, 10], где коэффициенты a, bвещественные постоянные числа, $t_0 > 0, f(t)$ −заданная вещественная непрерывная функция.

Рассмотрим следующие граничные условия

$$y(t_0) = y(T), \quad y'(t_0) = y'(T), (2)$$

т.е периодические граничные условия.Задачасостоит в нахождении решения граничной задачи (1),(2).

3. Сведение задачи (1), (2) к системе нормального вида

Пусть в (1) $\alpha = \frac{p}{q} \in (1,2)$,где p и q натуральные числа. Тогда в (1) произведем следующее преобразование:

$$y(t) = z_1(t),$$

$$D^{1/q}y(t) = D^{1/q}z_1(t) = z_2(t),$$

$$D^{2/q}y(t) = D^{2/q}z_1(t) = D^{1/q}z_2(t) = z_3(t),$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$D^{\frac{p-1}{q}}y(t) = D^{\frac{p-1}{q}}z_1(t) = \cdots = D^{\frac{1}{q}}z_{p-1}(t) = z_p(t),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \tag{3}$$

$$D^{\frac{2q-1}{q}}y(t) = D^{\frac{2q-1}{q}}z_1(t) = \cdots = D^{1/q}z_{2q-1}(t) = z_{2q}(t),$$

$$y''_{(t)} = D^{\frac{2q}{q}}y(t) = D^{\frac{2q}{q}}z_1(t) = \cdots = D^{1/q}z_{2q}(t) = f(t) - a\,z_{p+1}(t) - b\,z_1(t),$$

который в матричном виде представляется следующим образом:

$$D^{1/q}z(t) = Az(t) + B(t), \tag{4}$$

где

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_{p+1}(t) \\ \vdots \\ z_{2q}(t) \end{bmatrix},\ \text{A}=\begin{bmatrix} \overbrace{0\,1\,0\ldots0}^{P+1}\ \ldots 0\ 0 \\ 0\,0\,1\ldots0..\ \ 0\ 0 \\ 0\,0\,0\ldots0\ldots\ 0\ 1 \\ -b\ 0\ 0\,..-a..\ 0\ 0 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ f(t) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

спериодическими граничными условиями[11]:

$$z(t_0) = z(T). \tag{6}$$

Отметим, что граничные условия (6) содержат у себя и граничные условия (2). Теперь докажем, что поставленная граничная задача (4),(6) корректно, из за того что общее решение системы(4)содержит произвольный постоянный вектор размерности $2q$.

4. Исследование решения граничной задачи (4), (6).

Решение системы (4) будем искать в виде сдвинутой функция Миттага-Леффлере с неизвестными коэффициентами

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \frac{t^{-1+\frac{k}{q}}}{(-1+\frac{k}{q})!}, \tag{7}$$

где коэффициенты z_k неизвестные постоянные векторы. Вычислим производные порядка $\frac{1}{q}$[1,2]:

$$D^{1/q}z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \frac{t^{-1+\frac{k-1}{q}}}{(-1+\frac{k-1}{q})!}. \tag{8}$$

Принимая обозначение$k-1=m,$ тогда из (8) имеем:

$$D^{1/q}z(t)=\sum_{m=0}^{\infty} z_{m+1}\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{(-1+\frac{m}{q})!}=z_1\frac{t^{-1}}{(-1)!}+\sum_{m=1}^{\infty} z_{m+1}\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{(-1+\frac{m}{q})!}\ . \tag{9}$$

Как видно из [14], $t^{-1}/_{-1!}=\delta(t)$ и учитывая, что $t>t_0>0, \delta(t)$ =0. Поэтому в (9) первое слагаемое равняется нулю. Далее подставляя (9) и (7) в (4),получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_{m+1}\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{(-1+\frac{m}{q})!}=A\sum_{m=1}^{\infty} z_m\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{(-1+\frac{m}{q})!}++\sum_{m=1}^{\infty} B_m\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{\left(-1+\frac{m}{q}\right)!}\ , \tag{10}$$

где заданный вектор функции $B(t)$ был представлен в виде ряда Миттага-Леффлера:

$$B(t)=\sum_{m=1}^{\infty} B_m\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{(-1+\frac{m}{q})!}\,. \tag{11}$$

Как видно из(10) функция $\frac{t^{-1+\frac{m}{q}}}{(-1+\frac{m}{q})!}$при различных m является линейно не зависимыми функциями: поэтому из (10) получим

$$z_{m+1}=A\ z_m+B_m\ , \text{ при } m\geq 1\ . \tag{12}$$

При m=1,2 …из (12) имеет:

$$z_2=Az_1+B_1,$$

$$z_3=Az_2+B_2=A(Az_1+B_1)+B_2=A^2z_1+AB_1+B_2\ ,$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

$$z_m=A^{m-1}z_1+\sum_{k=1}^{m-1}A^{m-1-k}B_k,\ \ m\geq 2. \tag{13}$$

Итак получено общее решение системы (4) в виде (7), где коэффициенты z_kопределены в (13) через неизвестный постоянный вектор z_1 размерности 2q постоянных, а эти постоянные могут определены с помощью граничных условий (6).

Таким образом общее решение системы (4) имеет следующей вид [3-8,11,15]:

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A^{k-1}z_1 + \sum_{S=1}^{k-1} A^{k-1-S}B_S\right]\frac{t^{-1+\frac{k}{q}}}{(-1+\frac{k}{q})!}\ , \tag{14}$$

где неизвестный постоянный вектор z_1 определяется из соответствующих граничных условий.

5. Метод построения периодических решений граничных задач (4)-(6).

Подставляя общее решение (14) в граничное условие (6) имеем

$$z(t_0) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[A^{k-1}z_1 + \sum_{S=1}^{k-1} A^{k-1-S}B_S\right]\frac{{t_0}^{-1+\frac{k}{q}}}{\left(-1+\frac{k}{q}\right)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(A^{k-1}z_1 + \sum_{S=1}^{k-1} A^{k-1-S}B_S\right)\frac{T^{-1+\frac{k}{q}}}{(-1+\frac{k}{q})!} = z(T). \tag{15}$$

Группируя полученное уравнение относительно z_1 находим

$$\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1}\left(\frac{{t_0}^{-1+\frac{k}{q}} - T^{-1+\frac{k}{q}}}{\left(-1+\frac{k}{q}\right)!}\right)z_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k-1} A^{k-1-s}B_s\,\frac{T^{-1+\frac{k}{q}} - {t_0}^{-1+\frac{k}{q}}}{(-1+\frac{k}{q})!}. \tag{16}$$

Предположим, что в левой части уравнения (16) коэффициент z_1является не вырожденным,т.е.

$$\det\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1}\,\frac{{t_0}^{-1+\frac{k}{q}} - T^{-1+\frac{k}{q}}}{\left(-1+\frac{k}{q}\right)!} \neq 0\ . \tag{17}$$

Тогда из (16)для z_1 получим следующее соотношение

$$z_1 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1}\,\frac{{t_0}^{-1+\frac{k}{q}} - T^{-1+\frac{k}{q}}}{\left(-1+\frac{k}{q}\right)!}\right]^{-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{k-1} A^{k-1-s}B_s\,\frac{T^{-1+\frac{k}{q}} - {t_0}^{-1+\frac{k}{q}}}{(-1+\frac{k}{q})!}\right]. \tag{18}$$

Подставляя z_1 из (18) в общее решение системы (4),данное в (14) получаем периодическое решение граничной задачи (4)-(6) в виде

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\propto}\left\{A^{k-1}\left[\sum_{l=1}^{\infty} A^{l-1}\,\frac{{t_0}^{-1+\frac{l}{q}} - T^{-1+\frac{l}{q}}}{\left(-1+\frac{l}{q}\right)!}\right]^{-1} \times\right.$$

$$\left[\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{l-1} A^{l-1-s}B_s \frac{T^{-1+\frac{l}{q}} - t_0^{-1+\frac{l}{q}}}{(-1+\frac{l}{q})!}\right] + \sum_{s=1}^{k-1} A^{k-1-s}\, B_s \Bigg\} \frac{t^{-1+\frac{k}{q}}}{\left(-1+\frac{k}{q}\right)!}. \qquad (19)$$

Этим установим следующее.

Теорема: При заданных А и Вв виде(5), и условия (17) существует периодическое решение граничной задачи (4)-(6) представимое в виде (19).

Пример.

Пусть уравнение имеет (1) вид:

$$D^{1/2}y(t) = 1, \quad t \in (t_0, T), \qquad (20)$$

и имеет периодическое граничное условие

$$y(t_0) = y(T). \qquad (21)$$

Тогда общее решение однородного уравнения

$$D^{1/2}y(t) = 0, \qquad (22)$$

имеет вид:

$$y_0(t) = C\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}, \qquad (23)$$

гдеC- произвольное постоянное, а одно из частных решений неоднородного уравнения (20) имеет вид:

$$y_1(t) = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\ . \qquad (24)$$

Таким образом общее решение уравнения (20) имеет вид (7),(14):

$$y(t) = C\,\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}. \qquad (25)$$

Для определения постоянногоC подставляем (25) в (21), тогдаполучаем

$$C\,\frac{t_0^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{t_0^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} = C\,\frac{T^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{T^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!},$$

из которого C определяется в виде:

$$C = \frac{(-\frac{1}{2})!}{\frac{1}{2}!} \cdot \frac{T^{\frac{1}{2}} - t_0^{\frac{1}{2}}}{t_0^{-\frac{1}{2}} - T^{-\frac{1}{2}}}. \qquad (26)$$

Подставляя (26) в (25), периодические решения граничной задачи (20), (21) получаем в виде

$$y(t) = \frac{\sqrt{\frac{T}{t}} - \sqrt{\frac{t_0}{t}} + \sqrt{\frac{t}{t_0}} - \sqrt{\frac{t}{T}}}{(t_0^{-\frac{1}{2}} - T^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2}!}. \qquad (27)$$

Из (27) легко показать что

$$y(t_0) = \frac{\sqrt{\frac{T}{t_0}} - \sqrt{\frac{t_0}{T}}}{(t_0^{-\frac{1}{2}} - T^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2}!} = y(T),$$

т.е. решение (27) задачи (20),(21) является периодической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev F. A., Aliev N. A., Velieva N. I., Gasimova K. G.The method of discretization of fractional order linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, Nonlinear Oscillations, 2020, V.23, N1, pp.3-10.
2. Aliev F. A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Radjabov M.F. Analytical construction of regulators for systems with fractional derivatives , Proceedings of the Institute of Applied Mathematics 2017, 6 (2), pp.252-265.
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the Cauchy problem for stationary systems of fractional order linear ordinary differential equations. Computational methods for Differential Equations. V.8, No.1, pp.212-221.
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Larin Parameterization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, J. Appl. Comput. Mech., V.6(SI) , 2020, pp. 1426-1430
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Identification method for determining the order of the fractional

derivative of an oscillatory system. Proceedings of IAM. v.8, N 1, 2008, p.3-13.

6. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Ismailov, N.A., Analytical Construction of Regulators for Oscillatory Systems with Liquid Dampers, arXiv:2004.10388 [pdf] math, 2020.
7. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Gasimova, K.G., Velieva, N.I., Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients, Appl. Comput. Math., 17(3), 2018, 317-322.
8. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Transformation of the Mittag-Leffler Function to an Exponential Function and some of its Applications to Problems with a Fractional Derivative, Appl. Comput. Math., 18(3), 2019, 316-325.
9. Andreev Yu.I. Control of finite-dimensional linear objects, M., Nauka, 1976.
10. Bonilla, B., Rivero, M., Trujillo J. J., On Systems of Linear Fractional Differential Equations with Constant Coefficients, Applied Mathematics and Computation, 187(1), 2007, 68-78.
11. Mahmudov N.I., Huseynov I.T., Aliev N.A., Aliev F.A. Analytical approach to a class of Bagley Torvik equation. TWMS V.11, N.2, 2020, pp. 238-258.
12. Miller K.S., Ross, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336 p.
13. Mutallimov M.M., Aliev F.A. Methods for solving optimization problems during the operation of oil wells. Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 p.
14. Samko S.G., Kilbas A.A., Marchev O.I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Sciences Publishers. Yverdon, Switzerland, 1993, 760 p.
15. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mamedova G.H., AlievFikret A. Some remarks on the paper entitled "Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions" by Z.Tomovsky, Hilter R., and Srivastava H.M. TWMS J. Pure and Appl. Math.v.8, N1, 2017, pp.112-114.
16. Алиев Ф. А., Гасанов К.К., Алиев Н.А., Гулиев А.П. Численный алгоритм для решения системы гиперболических уравнений с частными производными, описывающей движение при добыче нефти , Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.85-95
17. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Наука, 1977.

METHOD FOR FINDING PERIODIC SOLUTIONS OF OSCILLATORY SYSTEMS WITH LIQUID DAMPERS

I.S.Magarramov[1], A.G.Jafarov[3], N.A.Aliyev[1], Fikret A.Aliyev[1,2]

[1]Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
[2] Institute of Information Technologies of the NAS of Azerbaijan
[3] Azerbaijan Pedagogical University, Baku, Azerbaijan

Abstract. In the paper Oscillatory systems with liquid dampers are considered, where the motion is described by an ordinary linear differential equation of the fractional derivative in the subordinate term. Taking the fractional derivative as a rational number, by means of its denominator with a step, the original operator equation for the first time is reduced to a normal system of differential equations similar to the classical case. It is shown that the general solution of the obtained system depends on arbitrary constants, which are determined using the given periodic boundary conditions. The results are illustrated by constructing periodic solutions for one simple fractional-order equation.

Keywords: oscillatory systems, liquid damper, fractional order derivative, normal system, periodic solution.

References

1. Aliev F. A., Aliev N. A., Velieva N. I., Gasimova K. G.The method of discretization of fractional order linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, Nonlinear Oscillations, 2020, V.23, N1, pp.3-10.
2. Aliev F. A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Radjabov M.F. Analytical construction of regulators for systems with fractional derivatives , Proceedings of the Institute of Applied Mathematics 2017, 6 (2), pp.252-265.
3. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the Cauchy problem for stationary systems of fractional order linear ordinary differential equations. Computational methods for Differential Equations. V.8, No.1, pp.212-221.
4. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Larin Parameterization to Solve the Problem of Analytical Construction of the Optimal Regulator of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, J. Appl. Comput. Mech., V.6(SI) , 2020, pp. 1426-1430
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Identification method for determining the order of the fractional derivative of an oscillatory system. ProceedingsofIAM. v.8, N 1, 2008, p.3-13.
6. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Ismailov, N.A., Analytical Construction of Regulators for Oscillatory Systems with Liquid Dampers, arXiv:2004.10388 [pdf] math, 2020.
7. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Gasimova, K.G., Velieva, N.I., Solution of Linear Fractional-Derivative Ordinary Differential Equations with Constant Matrix Coefficients, Appl. Comput. Math., 17(3), 2018, 317-322.

8. Aliev, F.A., Aliev, N.A., Safarova, N.A., Transformation of the Mittag-Leffler Function to an Exponential Function and some of its Applications to Problems with a Fractional Derivative, Appl. Comput. Math., 18(3), 2019, 316-325.
9. Andreev Yu.I. Control of finite-dimensional linear objects, M., Nauka, 1976.
10. Bonilla, B., Rivero, M., Trujillo J. J., On Systems of Linear Fractional Differential Equations with Constant Coefficients, Applied Mathematics and Computation, 187(1), 2007, 68-78.
11. Mahmudov N.I., Huseynov I.T., Aliev N.A., Aliev F.A. Analytical approach to a class of Bagley Torvik equation. TWMS V.11, N.2, 2020, pp. 238-258.
12. Miller, K.S., Ross, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, New York: Wiley, 1993, 336 p.
13. Mutallimov, M.M., Aliev, F.A. Methods for solving optimization problems during the operation of oil wells. Saarbrücken (Deutscland), LAP LAMBERT, 2012, 164 p.
14. Samko S.G., Kilbas A.A., Marchev O.I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. Gordon and Breach Sciences Publishers. Yverdon, Switzerland, 1993, 760 p.
15. Srivastava H.M., Aliev N.A., Mamedova G.H., Aliev Fikret A. Some remarks on the paper entitled “Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions” by Z.Tomovsky, Hilter R., and Srivastava H.M. TWMS J. Pure and Appl. Math.v.8, N1, 2017, pp.112-114
16. Aliev F. A., Gasanov K.K., Aliev N.A., Guliev A.P. Chislennyyalgoritmdlyaresheniyasistemygiperbolicheskikhuravneniy s chastnymiproizvodnymi, opisyvayushcheydvizheniepridobychenefti , Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.85-95 (Aliev F.A., Hasanov K.K., Aliyev N.A, Quliev A.P. Numerical method for solving a system of hyperbolic equations describing the motion in oil production, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.85-95) (in Russian)
17. RabotnovYu.N. Elementynasledstvennoymekhanikitverdykh tel. Nauka, 1977, (RabotnovYu.N. Elements of hereditary rigid body mechanics. Science, 1977) (in Russian)