Proceedings of IAM, V.13, N.2, 2024, pp.262-279
DOI: 10.30546/2225-0530.2024.13.2.037

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЖИДКИМИ ДЕМПФЕРАМИ

Н.А. Алиев[1,2], Н.С. Гаджиева[2], И.В. Алиева[1], Ш.А. Фараджева[3]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2] Институт Прикладной Математики при Бакинском Государственном Университете, Баку, Азербайджан
[3]Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
e-mail: nazile.m@mail.ru

Абстракт. В работе рассматривается задача определения дробного порядка при колебательном процессе внутри Ньютоновской жидкости. Во-первых, решение искомого уравнения сводится к уравнению Вольтерра второго порядка относительно второй производной фазовой координаты. Затем решение уравнения Вольтерра второго порядка сводится к ряду Неймана по второй производной фазовой координаты и после двукратного интегрирования этого решения находится решение искомого уравнения. Используя статистические данные, строится квадратичный функционал и определяется дробный порядок с помощью метода наименьших квадратов. Затем предлагается эффективный алгоритм. Включена таблица для определения дробного расположения на основе простого примера. Дробный состав получен с точностью 10^{-8}, что свидетельствует об эффективности предложенного алгоритма.

Ключевые слова: Колебательная система, производная дробного порядка, уравнение Вольтерра второго рода, метод наименьших квадратов.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

В последнее время много внимания уделяется использованию дифференциальных уравнений дробно рациональных порядков [25, 26-27, 30] в разных задачах механики, физики [6, 4, 5] и др. Здесь особенно можно отметить движение систем твердых тел в Ньютоновской жидкости [19, 4, 5]. До настоящего времени обычно рассматривалось движение плунжера внутри нефти. Поскольку основной частью бакинской нефти является Ньютоновской жидкостью [23, 6], там уравнение движения самого плунжера меняется и первый порядок колебательный системы заменяется дробно рациональным. Существует много разработок [7, 8, 9, 15-22], в которых движение объекта определяется из программной траектории, где он стабилизируется около этих траекторий. Эти задачи возникают при добыче нефти штанга-насосной установкой [14], требуется новый подход при ее решении. Поэтому, обычно в этих нефтяных задачах [24, 10, 11, 14] особенно нужно исследовать дифференциальные уравнения с частными производными, обыкновенные дифференциальные уравнения, определять порядок второго члена в колебательных системах [1] и др. Известны только классические параметры, входящие в колебательные системы, а нахождение дробно-рационального порядка является новой задачей. Поэтому, здесь очень интересным является определение этого параметра. Более интересным может быть нахождение этих параметров через статистические данные [1]. Можно эти данные взять из нефтяных промыслов. Применяя метод наименьших квадратов [24, 11] можно обеспечить совпадение теоретических результатов со статистическими данными. Отметим, что эта задача была рассмотрена в [1] и с помощью сведения исходных задач к решению интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно фазовых координат обеспечивает нуль первой вариации соответствующего функционала с 10^{-4} порядком, а через вторую производную фазовых координат с 10^{-8} порядком. Поэтому в исходной работе стараемся решить данную обратную задачу с помощью второй производной фазовых координат.

2. Сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра II рода относительно второго порядка.

Пусть движение объекта описывается следующей системой линейных дифференциальных уравнений с дробной производной [2,12, 13]

$$m\ddot{y}(x)+aD^{\alpha}y(x)+by(x)=f(x),\quad x>0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=y_1, \tag{2}$$

$\alpha\in(1,2), x>0,\ y(x)$- искомая функция, a,b- данные параметры, $f(x)$ - внешняя сила.

Составим следующий квадратичный функционал для нахождения α:

$$J(\alpha)=\min_{\alpha}\left(y(l)-\sum_{j=1}^{s}\frac{y_j}{s}\right)^2, \tag{3}$$

где $y_j,\ j=\overline{1,s}$ статистические данные для нахождения α, а $y(l)$ — значение решение задачи (1)-(2) в точке *l*.

Известно, что в [30], определение дробной производной в смысле Римана-Луивиля имеет вид

$$D^{\beta}y(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{(x-t)^{-\beta}}{(-\beta)!}y(t)dt,\ \beta\in(0,1). \tag{4}$$

Используя (4), мы выполняем простое преобразование дробной производной $D^{\alpha} y(x)$ следующим образом:

$$D^{\alpha} y(x) = DD^{\alpha-1} y(x) = DD\int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} y(t)dt. \qquad (5)$$

Применим формулу интегрирования по частям к выражению (5) и учтем начальное условие (2). Тогда имеем

$$D^{\alpha} y(x) = -D^2 \int_0^x y(t) d_t \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} =$$

$$= -D^2 \left[y(t) \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} \Bigg|_{t=o}^{x} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} \dot{y}(t)dt \right] =$$

$$= D^2 y(0) \frac{x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} + D^2 \int_0^x \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} \dot{y}(t)dt =$$

$$= Dy(0) \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + D\int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} \dot{y}(t)dt =$$

$$= -D\int_0^x \dot{y}(t) d_t \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} =$$

$$= -D\left[\dot{y}(t) \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} \Bigg|_{t=0}^{x} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} \ddot{y}(t)dt \right] =$$

$$= D\dot{y}(0) \frac{x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} \ddot{y}(t)dt = y_1 \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} +$$

$$+ \int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} \ddot{y}(t)dt. \qquad (6)$$

Теперь сделаем некоторые преобразования функции $y(x)$ и учтем начальное условие (2) [28, 29]

$$y(x)=\int_0^x \dot{y}(t)dt+y(0)=\int_0^x dt\left[\int_0^t \ddot{y}(\tau)\,d\tau+\dot{y}(0)\right]=\int_0^x dt\int_0^t \ddot{y}(\tau)d\tau+y_1x=$$

$$\int_0^x \ddot{y}(\tau)d\tau\int_\tau^x dt+y_1x=\int_0^x (x-\tau)\ddot{y}(\tau)\,d\tau+y_1x.$$

Таким образом, мы получаем формулы для $y(x)$

$$y(x)=\int_0^x (x-t)\ddot{y}(t)dt+y_1x. \tag{7}$$

Подставим выражения (6) и (7) в (1), имеем

$$m\ddot{y}(x)+a\left[y_1\frac{x^{1-\alpha}}{(1-t)!}+\int_0^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\ddot{y}(t)dt\right]+$$
$$+b\left[\int_0^x (x-t)\ddot{y}(t)dt+y_1x\right]=f(x). \tag{8}$$

Сейчас упростим выражение (8):

$$m\ddot{y}(x)+\int_0^x\left[a\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x-t)\right]\ddot{y}(t)dt=$$
$$=f(x)-ay_1\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}-by_1x. \tag{9}$$

Разделим обе части уравнения (9) на *m:*

$$\ddot{y}(x)+\int_0^x\left[\frac{a}{m}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\frac{b}{m}(x-t)\right]\ddot{y}dt=\frac{f(x)}{m}-$$
$$-\frac{a}{m}y_1\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}-\frac{b}{m}y_1x. \tag{10}$$

Таким образом, мы свели уравнение (1) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\ddot{y}(x)$:

$$\ddot{y}(x)+\int_0^x K(x-t)\ddot{y}(t)dt=F(x), \tag{11}$$

где

$$K(x-t)=-\frac{a}{m}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}-\frac{b}{m}(x-t)\equiv K_1(x-t), \tag{12}$$

$$F(x)=\frac{f(x)}{m}-\frac{a}{m}y_1\frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}-\frac{b}{m}y_1x. \tag{13}$$

Выполняем первую итерацию [16] по уравнению (11). Тогда

$$\ddot{y}(t)=-\int_0^t K(t-\tau)\ddot{y}(\tau)d\tau+F(t). \tag{14}$$

Подставим выражение (14) в (10)

$$\ddot{y}(x)+\int_0^x K(x-t)dt\left[-\int_0^t K(t-\tau)\ddot{y}(\tau)d\tau+F(t)\right]=\ddot{y}(x)-$$
$$-\int_0^x K(x-t)dt\int_0^t K(t-\tau)\ddot{y}(\tau)d\tau+\int_0^x K(x-t)F(t)dt=\ddot{y}(x)-$$
$$-\int_0^x \ddot{y}(\tau)d\tau\int_\tau^x K(x-t)K(t-\tau)dt+\int_0^x K(x-t)F(t)dt=F(x).$$

Далее

$$\ddot{y}(x)-\int_0^x \ddot{y}(\tau)d\tau\int_\tau^x K(x-t)K(t-\tau)dt=F(x)-\int_0^x K(x-t)F(t)dt.$$

Тогда

$$\ddot{y}(x)+\int_0^x K_2(x,\tau)\ddot{y}(\tau)d\tau=F_1(x), \tag{15}$$

где

$$K_2(x,\tau)=-\int_\tau^x K(x-t)K(t-\tau)dt, \tag{16}$$

$$F_1(x)=F(x)-\int_0^x K(x-t)F(t)dt. \tag{17}$$

Теперь давайте выполним вторую итерацию уравнения (10). Тогда из (10) получаем

$$\ddot{y}(\tau)=-\int_0^\tau K(\tau-t)\ddot{y}(t)dt+F(\tau). \tag{18}$$

Подставим выражение (18) в (15):

$$\ddot{y}(x)+\int_0^x K_2(x,\tau)\left[-\int_0^\tau K(\tau-t)\ddot{y}(t)dt+F(\tau)\right]d\tau=\ddot{y}(x)-$$

$$-\int_0^x K_2(x,\tau)d\tau\int_0^\tau K(\tau-t)\ddot{y}(t)dt+$$

$$+\int_0^x K_2(x,\tau)F(\tau)d\tau=F_1(x).$$

Далее

$$\ddot{y}(x)-\int_0^x K_2(x,\tau)d\tau\int_0^\tau K(\tau-t)\ddot{y}(t)dt=F_1(x)-\int_0^x K_2(x,\tau)F(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$\ddot{y}(x)+\int_0^x K_3(x,t)\ddot{y}(t)dt=F_2(x), \tag{19}$$

где

$$K_3(x,t)=-\int_t^x K_2(x-\tau)K(\tau-t)d\tau, \tag{20}$$

$$F_2(x)=F_1(x)-\int_0^x K_2(x-\tau)F(\tau)d\tau. \tag{21}$$

Подставим выражение (12) в выражение (16) и оценим ядро $K_2(x,\tau)$:

$$K_2(x,\tau)=-\int_\tau^x\left[\frac{a}{m}\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\frac{b}{m}(x-t)\right]\left[\frac{a}{m}\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+\frac{b}{m}(t-\tau)\right]dt=$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{a^2}{m^2}\int_\tau^x\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt-\frac{ab}{m^2}\int_\tau^x\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(t-\tau)dt-\\&-\frac{ab}{m^2}\int_\tau^x(x-t)\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt-\frac{b^2}{m^2}\int_\tau^x(x-t)(t-\tau)dt.\end{aligned} \tag{22}$$

Выполним преобразования над каждым членом, входящим в правую часть выражения (22)

$$\int_\tau^x\frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt=$$

$$=\int_0^1 \frac{(x-\tau)^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}(x-\tau)^{1-\alpha}z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!(1-\alpha)!}(x-\tau)dz=$$

$$=\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(1-\alpha)!^2}\int_0^1 z^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}dz=\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(1-\alpha)!^2}\frac{(1-\alpha)!^2}{(3-2\alpha)!}=\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!},$$

$$\int_\tau^x \frac{(x-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(t-\tau)dt=\int_0^1 \frac{(x-\tau)^{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\tau)z(x-\tau)dz=$$

$$=\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(1-\alpha)!}\int_0^1 (1-z)^{1-\alpha} zdz=\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!},$$

$$\int_\tau^x (x-t)\frac{(t-\tau)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}dt=\int_0^1 (x-\tau)(1-z)\frac{(x-\tau)^{1-\alpha}z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-\tau)dz=$$

$$=\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(1-\alpha)!}\int_0^1 (1-z)z^{1-\alpha}dz=\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!},$$

$$\int_\tau^x (x-t)(t-\tau)dt=\int_\tau^x \left(xt-x\tau-t^2+t\tau\right)dt=$$

$$=x\frac{t^2}{2}\Big|_{t=\tau}^{x}-x\tau(x-\tau)-\frac{t^3}{3}\Big|_{t=\tau}^{x}+\tau\frac{t^2}{2}\Big|_{t=\tau}^{x}=$$

$$=\frac{x}{2}\left(x^2-\tau^2\right)-x\tau(x-\tau)-\frac{x^3-\tau^3}{3}+\frac{\tau}{2}\left(x^2-\tau^2\right)=\frac{x^3}{2}-\frac{x\tau^2}{2}-$$

$$-x^2\tau+x\tau^2-\frac{x^3}{3}+\frac{\tau^3}{3}+\frac{x^2\tau}{2}-\frac{\tau^3}{2}=\frac{x^3}{6}+\frac{x\tau^2}{2}-\frac{x^2\tau}{2}-\frac{\tau^3}{6}=$$

$$=\frac{1}{3!}\left(x^3-3x^2\tau+3x\tau^2-\tau^3\right)=\frac{(x-\tau)^3}{3!},$$

где $t=(x-\tau)z+\tau.$

Отметим, что в [3]

$$\int_0^1 x^\eta(1-x)^\mu dx=\frac{\eta!\mu!}{(1+\eta+\mu)!}.$$

Подставим каждое из полученных выше выражений в (22):

$$K_2(x,\tau)=-\frac{a^2}{m^2}\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}-\frac{ab}{m^2}\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}-\frac{ab}{m^2}\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}-$$

$$-\frac{b^2}{m^2}\frac{(x-\tau)^3}{3!}=-\sum_{k=0}^{2}C_2^k\left(\frac{a}{m}\right)^{2-k}\left(\frac{b}{m}\right)^k\frac{(x-\tau)^{3-(2-k)\alpha}}{(3-(2-k)\alpha)!}\equiv$$

$$\equiv K_2(x-\tau). \tag{23}$$

Далее, подставим выражения (12) и (23) в выражение (20) и оценим ядро $K_3(x,\tau)$:

$$K_3(x-t)=-\left(\frac{a}{m}\right)^3\int_t^x\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\frac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau-$$

$$-\frac{a^2b}{m^3}\int_t^x\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}(\tau-t)d\tau-$$

$$-\frac{2a^2b}{m^3}\int_t^x\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau-\frac{2ab^2}{m^3}\int_t^x\frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}(\tau-t)d\tau-$$

$$-\frac{ab^2}{m^3}\int_t^x\frac{(x-\tau)^3}{3!}\frac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau-\frac{b^3}{m^3}\int_t^x\frac{(x-\tau)^3}{3!}(\tau-t)d\tau. \tag{24}$$

Выполним преобразования над каждым членом, входящим в правую часть выражения (24)

$$\int_t^x\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\frac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau=$$

$$=\int_0^1\frac{(x-t)^{3-2\alpha}(1-z)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}\frac{(x-t)^{1-\alpha}z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-t)dz=$$

$$=\frac{(x-t)^{5-3\alpha}}{(3-2\alpha)!(1-\alpha)!}\int_0^1(1-z)^{3-2\alpha}z^{1-\alpha}dz=\frac{(x-t)^{5-3\alpha}}{(5-3\alpha)!},$$

$$\int_t^x\frac{(x-\tau)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}(\tau-t)d\tau=\int_0^1\frac{(x-t)^{3-2\alpha}(1-z)^{3-2\alpha}}{(3-2\alpha)!}(x-t)z(x-t)dz=$$

$$=\frac{(x-t)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!},$$

$$\int_t^x \frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau =$$

$$=\int_0^1 \frac{(x-t)^{3-\alpha}(1-z)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}\frac{(x-t)^{1-\alpha}z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}(x-t)dz = \frac{(x-t)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!},$$

$$\int_t^x \frac{(x-\tau)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}(\tau-t)d\tau = \int_0^1 \frac{(x-t)^{3-\alpha}(1-z)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)!}(x-t)z(x-t)dz =$$
$$\frac{(x-t)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!},$$

$$\int_t^x \frac{(x-\tau)^{3}}{3!}\frac{(\tau-t)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}d\tau = \int_0^1 \frac{(x-t)^{3}(1-z)^{3}}{3!}(x-t)^{1-\alpha}z^{1-\alpha}(x-t)dz =$$
$$\frac{(x-t)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!},$$

$$\int_t^x \frac{(x-\tau)^{3}}{3!}(\tau-t)d\tau = \int_0^1 \frac{(x-t)^{3}(1-z)^{3}}{3!}(x-t)z(x-t)dz = \frac{(x-t)^{5}}{3!}.$$

Подставим каждое из полученных выше выражений в (24):

$$K_3(x-t) = -\frac{a^3}{m^3}\frac{(x-t)^{5-3\alpha}}{(5-3\alpha)!} - \frac{a^2b}{m^3}\frac{(x-t)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!} - \frac{3a^2b}{m^3}\frac{(x-t)^{5-2\alpha}}{(5-2\alpha)!} -$$
$$-\frac{3ab^2}{m^3}\frac{(x-t)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!} - \frac{a^2b}{m^3}\frac{(x-t)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)!} - \frac{b^3}{m^3}\frac{(x-t)^{5}}{5!} = \tag{25}$$
$$= -\sum_{k=0}^{3} C_3^k \left(\frac{a}{m}\right)^{3-k}\left(\frac{b}{m}\right)^k \frac{(x-t)^{5-(3-k)\alpha}}{(5-(3-k)\alpha)!}.$$

Итак, после n-й итерации получаем:

$$\ddot{y}(x) + \int_0^x K_n(x-t)\ddot{y}(t)dt = F_{n-1}(x), \tag{26}$$

где

$$K_n(x-t) = -\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{a}{m}\right)^{n-k}\left(\frac{b}{m}\right)^k \frac{(x-t)^{2n-1-(n-k)\alpha}}{(2n-1-(n-k)\alpha)!}, \tag{27}$$

$$F_{n-1}(x)=F(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^x K_k(x-t)F(t)dt.$$

Если взять предел в (26) при $n\to\infty$, то получим:

$$\ddot{y}(x)=\lim_{n+\infty}F_{n-1}(x)=F(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x K_k(x-t)F(t)dt. \tag{28}$$

Чтобы найти решение *y(x)*, сначала проинтегрируем выражение (28) от нуля до *x* и учтем условие (2):

$$\dot{y}(x)=y_1+\int_0^x F(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x d\xi\int_0^{\xi}K_k(\xi-t)F(t)dt=y_1+\int_0^x F(t)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x F(t)dt\int_t^x K_k(\xi-t)d\xi.$$

Затем проинтегрируем последнее выражение от нуля до *x* и учтем условие (2):

$$y(x)=y_1x+\int_0^x d\eta\int_0^{\eta}F(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x d\eta\int_0^{\eta}F(t)dt\int_t^x K_k(\xi-t)d\xi=$$

$$=y_1x+\int_0^x F(t)dt(x-t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x F(t)dt\int_t^x d\eta\int_t^x K_k(\xi-t)d\xi=y_1x+\int_0^x(x-t)F(t)dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x(x-t)F(t)dt\int_t^x K_k(\xi-t)d\xi.$$

Далее

$$y(x)=y_1x+\int_0^x(x-t)F(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x(x-t)F(t)dt\int_t^x K_k(\xi-t)d\xi. \tag{29}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(2) сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода в виде (11), а решение (29) описывается в виде ряда Неймана.

3. Нахождение дробно-рационального порядка α.

Вычислим значение решения (29) в точке *l*:

$$y(l)=y_1l+\int_0^l(l-t)F(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l(l-t)F(t)dt\int_t^l K_k(\xi-t)d\xi. \tag{30}$$

Теперь рассмотрим выражение (30) в функционале (3):

$$J(\alpha)=\min_{\alpha}\left(y_1 l+\int_0^l (l-t)F(t)dt+\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l (l-t)F(t)dt\int_t^l K_k(\xi-t)d\xi-\sum_{j=1}^{s}\frac{y_j}{s}\right)^2. \qquad (31)$$

Для нахождения параметра α найдем производную функционала (31) по α и положим ее равной нулю.
Представим следующий алгоритм решения задачи (1)-(3):

Алгоритм.

1. Ввод параметров $m, a, b, y_1, f, n, k, l.$
2. Расчет выражения для $F(x)$ согласно (13).
3. Расчет выражения для $K_k(x-t)$ по (27).
4. Ввод статистических данных $y_j,\ \ j=\overline{1,s}$.
5. Построение функционала (31).
6. Для вычисления параметра α проверяются условия

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{J(\alpha+h)-J(\alpha)}{h}\approx 0. \qquad (32)$$

Пример. Рассмотрим более упрощенный вариант задачи (1)-(3). Пусть
$m=10^3,\ a=3,\ b=1,\ y_1=10^{-2},\ f=8, n=1, k=1,\ l=1, s=11,$
$y_1(x)=0, y_2(x)=-0.67, y_3(x)=-0.34, y_4(x)=0.81, y_5(x)=1.22,$
$y_6(x)=1.44, y_7(x)=1.57, y_8(x)=1.66, y_9(x)=1.72, y_{10}(x)=1.77,$
$y_{11}(x)=1.81.$

Теперь давайте вставим данные в следующую таблицу, чтобы удовлетворить формуле (31):

	$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha},\alpha=1.1$	$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha},\alpha=1.2$	$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha},\alpha=1.4$	$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha},\alpha=1.85$
$h=10^{-1}$	$0.52392\cdot10^{-4}$	$0.6982\cdot10^{-4}$	$0.1381\cdot10^{-3}$	$0.64572\cdot10^{-2}$
$h=10^{-2}$	$0.46237\cdot10^{-4}$	$0.6087\cdot10^{-4}$	$0.61156\cdot10^{-3}$	$0.2172\cdot10^{-2}$
$h=10^{-3}$	$0.45690\cdot10^{-4}$	$0.6009\cdot10^{-4}$	$0.1137\cdot10^{-3}$	$0.2036\cdot10^{-2}$
$h=10^{-4}$	$0.45636\cdot10^{-4}$	$0.60018\cdot10^{-4}$	$0.11358\cdot10^{-3}$	$0.2023\cdot10^{-2}$
$h=10^{-5}$	$0.45631\cdot10^{-4}$	$0.60010\cdot10^{-4}$	0.1135610^{-3}	$0.2022\cdot10^{-2}$

Таблица. Определение дробно-рационального порядка.

Как видно из таблицы, при $\alpha = 1.1$ первая вариация $\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}$ приближается к нулю с точностью до 10^{-8}. В [1] $\alpha = 1.85$, полученный с точностью 10^{-4}. Как видно из таблицы, при $\alpha = 1.85$ первая вариация $\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}$ приближается к нулю с точностью до 10^{-5}. Отсюда еще раз ясно, что наиболее эффективным дробным рациональном порядком является $\alpha = 1.1$.

Авторы выражают благодарность академику Ф.А. Алиеву за постановку задачи и ценные советы при изучении рабочих рекомендаций по оформлению статьи.

7. Заключение.

В данной работе предложен эффективный алгоритм определения дробного порядка в колебательных системах с жидкими демпферами путем сведения этого уравнения к интегральному уравнению Вольтера второго порядка относительно производной второго порядка фазовой координаты. Первая вариация эффективного значения дробной формулы, полученная по данному алгоритму, приближается к нулю с точностью 10^{-8}, а в задаче [1] — с точностью 10^{-4}. Это свидетельствует о том, что предложенный алгоритм более эффективен.

Литература

1. Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Муталлимов М.М., Намазов А.А. Метод идентификации для определения порядка дробной производной колебательной системы, Proceedings of IAM, V.8, N.1, (2019), pp.3-13.
2. Алиев Ф.А., Алиев Н.А., Магеррамов И.А., Мамедова Е.В. Об одном новом методе решения задачи коши для уравнения колебательных систем с жидкими демпферами, Proceedings of IAM, V.10, N.1, (2021), pp.25-44.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по Математике для Инженеров и Учащихся Втузов, Москва, Наука, (1964), 608 с.
4. Гаджиева Н.С. Определение оптимальной программной траектории и управления движением плунжера штанго-насосной установки , Proceedings of IAM, V.11, N.2, (2022), pp.137-158.
5. Расулзаде А.Ф., Гаджиева Н.С., Исмаилов Н.А. Определение оптимальной программной траектории и управления

дискретизированным движением плунжера штанго-насосной установки, Proceedings of IAM, V.11., N.2., (2022), pp.203-220.
6. Aliev F.A., Aliev N.A., Rasulzade A.F., Hajiyeva N.S. Solution of the optimal program trajectory and control of the discretized equation of motion of sucker-rod pumping unit in a Newtonian fluid, TWMS J. App. and Eng. Math. V.13, N.4, (2023), pp.1369-1382.
7. Aliev F.A., Aliyev N.A, Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Magarramov I.A., Ramazanov A.B., Abdullayev V.C. Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions, SOCAR Proceedings, N.4, (2021), pp. 115-121.
8. Aliev F.A., Aliyev N.A, Hajiyeva N.S., Mahmudov N.I. Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers: A review, Applied and Computational Mathematics, V.20, N.3, (2021), pp.339-365.
9. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Safarova N.A., Aliyeva R. Asymptotic method for solution of oscillatory fractional derivative, Computational Methods for Differential Equations, V.10, N.4, (2022), pp.1123-1130.
10. Aliev F.A., Abbasov A.N., Gurbanov R.A., Nuriev N.B., Guliev F.A., Mutallimov M.M. Mathematical modeling for control problem and well subsurface pump units operation diagnostics in oil field, Appl. Comput. Math, V.1, N.1, (2002), pp.93-105.
11. Aliev F.A., Aliev N.A., Guliev A.P. Time frequency method of solving one boundary value problem for a hyperbolic system and its application to the oil extraction, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, V.12, N.2, (2016), pp.101–112.
12. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case, Journal of Applied and Computational Mechanics, V.7, N.2, (2021), pp.970-976.
13. Aliev F.A., Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G. A Method for the Discretization of Linear Systems of Ordinary Fractional Differential Equations with Constant Coefficients, Journal of Mathematical Sciences, V.256, (2021), pp.567-575.
14. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A. Computer simulation of crude oil extraction using a sucker rod pumping unit in the oil well–resevoir system, International Applied Mechanics, V.55, (2019), pp.332-341.
15. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A. Transformation of the Mittag-Leffler function to an exponential function and some of its applications to problems with a fractional derivative, Appl. Comput. Math., V.18, N.3, (2019), pp.316-325.

16. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix coefficients, Appl. Comput. Math., V.17, N.3, (2018), pp.317-322.
17. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y. Solution of the problem of analytical construction of optimal regulators for a fractional order oscillatory system in the general case, J. Appl. Comput. Mech., V.7, N.2, (2021), pp.970-976.
18. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the Cauchy problem for stationary systems of fractional order linear ordinary differential equations, Computational methods for differential equations, V.8, N.1, (2020), pp.212-221.
19. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I., Larin parameterization to solve the problem of analytical construction of the optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers, J. Appl. Comput. Mech., V.6 (SI), (2020), pp.1426-1430.
20. Aliev F.A., Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G. The method of discretization of fractional order linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, Nonlinear Oscillations, V.23, N.1, (2020), pp.3-10.
21. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Algorithm for solving the identification problem for determining the fractional-order derivative of an oscillatory system, Appl. Comput. Math., V.19, N.3, (2020), pp.415-422.
22. Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G., Resulzade A.F. Discretization method on movement equation of the oscillating system with liquid dumpers, Proceedings of IAM, V.8, N.2, (2019), pp.211-228.
23. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput., V.187, (2007), pp.68-78.
24. Hajiyeva N.S., Aliev F.A. Algorithm for finding program trajectories and controls during oil production by the gas lift method in general case, Proceedings of IAM, V.12, N.1, (2023), pp.76-84.
25. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, New York, Wiley, (1993), 336p.
26. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d‘une branche uniforme d’une function monogene: cinquieme note, Acta Mathematica, V.29, (1905), pp.101-181.
27. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, (2010), 414p.

28. Petrovski I.G. Lectures on the Theory of Integral Equations, Nauka, Moscow, (1965), 128p.
29. Petrovsky I.G. Lectures on the Theory of Ordinary Equations, Gostekhizdat, (1952), 232p. (in Russian).
30. Samko S., Marichev O., Kilbas A. Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications, Science and Technica, Minsk, (1987).

ALGORITHM FOR DEFINING THE FRACTIONAL ORDER OF AN OSCILLATORY SYSTEM WITH LIQUID DAMPERS

N.A. Aliev[1,2], N.S. Hajiyeva[1], I.V. Alieva[1], Sh. A. Farajova[3]

[1]Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
[3]Azerbaijan State Pedagogical University
e-mail: nazile.m@mail.ru

Abstract

The paper considers the problem of determining the fractional order in an oscillatory process inside a Newtonian fluid. Firstly, the solution to the desired equation is reduced to the Volterra equation of the second order with respect to the second derivative of the phase coordinate. Then, the solution to the Volterra equation of the second order is reduced to the Neumann series with respect to the second derivative of the phase coordinate and, after integrating this solution twice, the solution to the desired equation is found. Using statistical data, a quadratic functional is constructed and the fractional order is determined using the least squares method. Then, an effective algorithm is proposed. A table is included for determining the fractional arrangement based on a simple example. The fractional composition is obtained with an accuracy of 10^{-8}, which indicates the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: Oscillatory system, fractional derivative, Volterra equation of the second kind, least squares method.

References

1. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Metod identifikacii dlja opredelenija porjadka drobnoj proizvodnoj kolebatel'noj sistemy, Proceedings of IAM, V.8, N.1, (2019), pp.3-13 (Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Identification method for determining the order of the fractional derivative of an oscillatory system, Proceedings of IAM, V.8, N.1, (2019), pp.3-13).
2. Aliev F.A., Aliev N.A., Magerramov I.A., Mamedova E.V. Ob odnom novom metode reshenija zadachi koshi dlja uravnenija kolebatel'nyh

sistem s zhidkimi dempferami, Proceedings of IAM, V.10, N.1, (2021), pp.25-44. (Aliev F.A., Aliev N.A., Magerramov I.A., Mamedova E.V. On a new method for solving the Cauchy problem for the equation of oscillatory systems with liquid dampers, Proceedings of IAM, V.10, N.1, (2021), pp.25-44).

3. Bronshtejn I.N., Semendjaev K.A. Spravochnik po Matematike dlja Inzhenerov i Uchashhihsja Vtuzov, Moskva, Nauka, (1964), 608 s. (Bronstein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of Mathematics for Engineers and Students of Higher Technical Schools, Moscow, Nauka, (1964), 608 p.)
4. Gadzhieva N.S. Opredelenie optimal'noj programmnoj traektorii i upravlenija dvizheniem plunzhera shtango-nasosnoj ustanovki , Proceedings of IAM, V.11, N.2, (2022), pp.137-158. (Hajiyeva N.S. Determination of the optimal program trajectory and control of the plunger movement of a sucker rod pump unit, Proceedings of IAM, V.11, N.2, (2022), pp.137-158)
5. Rasulzade A.F., Gadzhieva N.S., Ismailov N.A. Opredelenie optimal'noj programmnoj traektorii i upravlenija diskretizirovannym dvizheniem plunzhera shtango-nasosnoj ustanovki, Proceedings of IAM, V.11., N.2., (2022), pp.203-220. (Rasulzade A.F., Gadzhieva N.S., Ismailov N.A. Determination of the optimal program trajectory and control of the discretized motion of the plunger of the sucker rod pump unit, Proceedings of IAM, V.11., N.2., (2022), pp.203-220)
6. Aliev F.A., Aliev N.A., Rasulzade A.F., Hajiyeva N.S. Solution of the optimal program trajectory and control of the discretized equation of motion of sucker-rod pumping unit in a Newtonian fluid, TWMS J. App. and Eng. Math. V.13, N.4, (2023), pp.1369-1382.
7. Aliev F.A., Aliyev N.A, Hajiyeva N.S., Ismailov N.A., Magarramov I.A., Ramazanov A.B., Abdullayev V.C. Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions, SOCAR Proceedings, N.4, (2021), pp. 115-121.
8. Aliev F.A., Aliyev N.A, Hajiyeva N.S., Mahmudov N.I. Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers: A review, Applied and Computational Mathematics, V.20, N.3, (2021), pp.339-365.
9. Aliev F.A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Safarova N.A., Aliyeva R. Asymptotic method for solution of oscillatory fractional derivative, Computational Methods for Differential Equations, V.10, N.4, (2022), pp.1123-1130.
10. Aliev F.A., Abbasov A.N., Gurbanov R.A., Nuriev N.B., Guliev F.A., Mutallimov M.M. Mathematical modeling for control problem and

well subsurface pump units operation diagnostics in oil field, Appl. Comput. Math, V.1, N.1, (2002), pp.93-105.

11. Aliev F.A., Aliev N.A., Guliev A.P. Time frequency method of solving one boundary value problem for a hyperbolic system and its application to the oil extraction, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, V.12, N.2, (2016), pp.101–112.
12. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y.V. Solution of the Problem of Analytical Construction of Optimal Regulators for a Fractional Order Oscillatory System in the General Case, Journal of Applied and Computational Mechanics, V.7, N.2, (2021), pp.970-976.
13. Aliev F.A., Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G. A Method for the Discretization of Linear Systems of Ordinary Fractional Differential Equations with Constant Coefficients, Journal of Mathematical Sciences, V.256, (2021), pp.567-575.
14. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Veliev N.A., Gasanov I.R., Alizade N.A. Computer simulation of crude oil extraction using a sucker rod pumping unit in the oil well–resevoir system, International Applied Mechanics, V.55, (2019), pp.332-341.
15. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A. Transformation of the Mittag-Leffler function to an exponential function and some of its applications to problems with a fractional derivative, Appl. Comput. Math., V.18, N.3, (2019), pp.316-325.
16. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Gasimova K.G., Velieva N.I. Solution of linear fractional-derivative ordinary differential equations with constant matrix coefficients, Appl. Comput. Math., V.17, N.3, (2018), pp.317-322.
17. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Mamedova Y. Solution of the problem of analytical construction of optimal regulators for a fractional order oscillatory system in the general case, J. Appl. Comput. Mech., V.7, N.2, (2021), pp.970-976.
18. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the Cauchy problem for stationary systems of fractional order linear ordinary differential equations, Computational methods for differential equations, V.8, N.1, (2020), pp.212-221.
19. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I., Larin parameterization to solve the problem of analytical construction of the optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers, J. Appl. Comput. Mech., V.6 (SI), (2020), pp.1426-1430.
20. Aliev F.A., Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G. The method of discretization of fractional order linear systems of ordinary differential equations with constant coefficients, Nonlinear Oscillations, V.23, N.1, (2020), pp.3-10.

21. Aliev F.A., Aliev N.A., Mutallimov M.M., Namazov A.A. Algorithm for solving the identification problem for determining the fractional-order derivative of an oscillatory system, Appl. Comput. Math., V.19, N.3, (2020), pp.415-422.
22. Aliev N.A., Velieva N.I., Gasimova K.G., Resulzade A.F. Discretization method on movement equation of the oscillating system with liquid dumpers, Proceedings of IAM, V.8, N.2, (2019), pp.211-228.
23. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional differential equations with constant coefficients, Appl. Math. Comput., V.187, (2007), pp.68-78.
24. Hajiyeva N.S., Aliev F.A. Algorithm for finding program trajectories and controls during oil production by the gas lift method in general case, Proceedings of IAM, V.12, N.1, (2023), pp.76-84.
25. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, New York, Wiley, (1993), 336p.
26. Mittag-Leffler G. Sur la representation analytique d‘une branche uniforme d’une function monogene: cinquieme note, Acta Mathematica, V.29, (1905), pp.101-181.
27. Monje C.A., Chen Y.Q, Vinagre B.M, Xue D., Feliu V. Fractional-Order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer, London, (2010), 414p.
28. Petrovski I.G. Lectures on the Theory of Integral Equations, Nauka, Moscow, (1965), 128p.
29. Petrovsky I.G. Lectures on the Theory of Ordinary Equations, Gostekhizdat, (1952), 232p. (in Russian).
30. Samko S., Marichev O., Kilbas A. Fractional Integrals and Derivatives and Some of Their Applications, Science and Technica, Minsk, (1987).