Proceedings of IAM, V.13, N.2, 2024, pp.280-289
DOI: 10.30546/2225-0530.2024.13.2.042

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЖИДКИМИ ДЕМПФЕРАМИ

А.Ф. Расулзаде

Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: resulzadeaynur@gmail.com

Абстракт. В статье формулируется задача стабилизации добычи нефти штанго-насосным агрегатом и показывается, что решение сводится к периодической задаче оптимизации в подъемной установке. Затем его решение выполняется путем сведения к решению периодического матричного уравнения Риккати. Результаты иллюстрируются числовым примером.

Ключевые слова: Жидкий демпфер, колебательная система, дискретизация, уравнение Риккати, оптимальное управление, устойчивость.

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35.

1. Введение

При добыче нефти существуют различные математические подходы для нахождения оптимальных траекторий и управлений для дискретных колебательных систем, движущихся в жидком демпфере [2,4,12,17]. Такие системы определяются дифференциальными уравнениями, включающими дробные производные. В таких задачах рассматривается задача оптимизации для нахождения программных траекторий и управлений [5,6,13,16], и ее решение сводится к нахождению периодической задачи оптимизации. Большой интерес представляет задача совместной оптимальной стабилизациипрограммных траекторий и управлений на бесконечном интервале.

Показано, что нахождение решения соответствующей задачи оптимизации требует решения периодического матричного уравнения Риккати, и его решение может быть описано с помощью соответствующего алгебраического матричного уравнения Риккати. В конце также рассмотрена оценка асимптотической устойчивости замкнутой системы в задаче оптимизации.

2. Постановка задачи:

Мы знаем, что уравнение движения колебательных систем, движущихся в жидком демпфере, определяется дифференциальными уравнениями, включающими дробные производные.После дискретизации этого уравнения [1,3,4,13] мы получаем следующее уравнение.

$$\ddot{y}(x)+aD^{\alpha}y(x)+by(x)=f(x),\ 0<x_0<x<l+x_0,\ l+x_0<x<2l+x_0, \quad (1)$$

Краевые условия является периодическим

$$y(2l)=y(0),$$
$$\dot{y}(2l)=\dot{y}(0), \quad (2)$$

Вопрос о периодической оптимизации создает определенные трудности при рассмотрении проблемы стабилизации, поэтому мы сначала дискретизируем задачу и приводим ее к стандартной форме, а затем ставим задачу [5,9,11,15,17,20].

3. Дискретная модель системы

$$W_{i+1}=A_iW_i+B_iW_0+F_i,\ i=\overline{0,1,2,\ldots}, \quad (3)$$

Здесь

$$B_n=\Big(\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n-2}\prod_{j=1}^{k}A_{i_{k+1-j}}\Big)A_0+A_0+\Big(\sum_{k=1}^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n-2}\prod_{j=1}^{k}A_{i_{k+1-j}}\omega_{i_{k+1-j}}\Big)+\omega_n, \quad (4)$$

$$\omega_n=\begin{pmatrix} -h^2\left(a\dfrac{x_{2n-2}^{-\alpha}}{(-\alpha)!}+bx_{2n-2}\right)\left[2h^2-h^3K_\alpha\left(x_{2n-1}-x_{2n-2}\right)+1\right] & \left[2h^2-h^3K_\alpha\left(x_{2n-1}-x_{2n-2}\right)\right]\left[-hK_\alpha\left(x_{2n-2}\right)\right] \\ -h\left(a\dfrac{x_{2n-2}^{-\alpha}}{(-\alpha)!}+bx_{2n-2}\right)+\left[2h^2-h^3K_\alpha\left(x_{2n-1}-x_{2n-2}\right)\right]hK_\alpha\left(x_{2n-2}\right) & -h\left(a\dfrac{x_{2n-2}^{-\alpha}}{(-\alpha)!}+bx_{2n-2}\right)\end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A_n=\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11}^{(n-1)} & \mathrm{A}_{12}^{(n-1)} \\ \mathrm{A}_{21}^{(n-1)} & \mathrm{A}_{22}^{(n-1)}\end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathrm{A}_{11}^{(n-1)}(a,n,h)=1-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right], \quad (7)$$

$$\mathrm{A}_{12}^{(n-1)}(a,n,h)=2-h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right], \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_{21}^{(n-1)}(a,n,h)&=-2-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]+4h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-\\ &h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-4})\right]+2h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+\\ &h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\times\\ &\times\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-4})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-4})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]\right\},\end{aligned} \quad (9)$$

$$\mathrm{A}_{22}^{(n-1)}(a,n,h)=3-2h\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right]-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-3})\right]+ \tag{10}$$
$$+h^2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2n-3})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-3})\right],$$

$$A_k=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{11}^{(k)} & \mathrm{A}_{12}^{(k)}\\ \mathrm{A}_{21}^{(k)} & \mathrm{A}_{22}^{(k)}\end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\mathrm{A}_{11}^{(k)}(a,n,h)=-2h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-2})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]+\right. \tag{12}$$
$$\left.+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k})\right]\right\},k=\overline{1,n-2},$$

$$\mathrm{A}_{12}^{(k)}(a,n,h)=-h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]+\right. \tag{13}$$
$$\left.+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k+1})\right]\right\},k=\overline{1,n-2},$$

$$\mathrm{A}_{21}^{(k)}(a,n,h)=-h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2n-2})\right]\right\}-\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-2})\right]-\right.$$
$$\left.-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]\right\}- \tag{14}$$
$$-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-2})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-1})\right]+$$
$$\left.+\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]\right\},k=\overline{1,n-2},$$

$$\mathrm{A}_{22}^{(k)}(a,n,h)=-h\left\{2-h\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2n-2})\right]\right\}\cdot\left\{\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k-1})\right]-\right.$$
$$-2\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k})\right]+\left[a\frac{(x_{2n-2}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-2}-x_{2k+1})\right]- \tag{15}$$
$$-h\left\{\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-1})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]+\right.$$
$$+\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k-1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k-1})\right]-2\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k})\right]+$$
$$\left.+\left[a\frac{(x_{2n-1}-x_{2k+1})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!}+b(x_{2n-1}-x_{2k+1})\right]\right\},k=\overline{1,n-2},$$

$$F_i=\left(\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{1<i_1<i_2<\ldots<i_k\le m-2}\prod_{j=1}^{k}A_{i_{k+1-j}}f_{i_{k+1-j}}\right)+f_i \tag{16}$$

$$f_n=\begin{pmatrix}\tilde{f}_{n1}\\ \tilde{f}_{n2}\end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\tilde{f}_{n1} = h^2 f_{2n-2} \tag{18}$$

$$\tilde{f}_{n2} = \left(2h^2 - h^3 \left(a \frac{(x_{2n-1} - x_{2n-2})^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} + b(x_{2n-1} - x_{2n-2}) \right) \right) f_{2n-2} + h^2 f_{2n-1} \tag{19}$$

4. Классический вид:

Приведем уравнение (3) в классическом виде:

$$W_{i+1} = \varphi_i W_i + U_i, \qquad i = \overline{0,1,2,...} \tag{20}$$

Здесь

$$\varphi_n = A_n + B_n \left[(A_0 + B_0) \prod_{m=1}^{n-1} A_m + \prod_{k=1}^{n-1} B_k \prod_{m=k+1}^{n-1} A_m \right]^{-1} \tag{21}$$

$$U_n = F_n - \left[B_n \sum_{k=0}^{n-1} F_k \prod_{m=k+1}^{n-1} A_m \right] \left[(A_0 + B_0) \prod_{m=1}^{n-1} A_m + \prod_{k=1}^{n-1} B_k \prod_{m=k+1}^{n-1} A_m \right]^{-1} \tag{22}$$

Следовательно, уравнение (3) примет классическую форму. Уравнение (10) выполняет периодическое условие в виде[1,6-8]:

$$W_0 = W_{2n}, \tag{23}$$

В задаче (20) рассчитывались $W_{i+1}{}^{pr}$, $i = \overline{0,1,2,...}$ оптимальные программные траектории и $U_i{}^{pr}$, $i = \overline{0,1,2,...}$ управления.

Тогда для построения регулятора требуется найти управление такое, что из следующих оптимизационных задач и $W_{i+1} \to W_{i+1}{}^{pr}$ və $U_i \to U_i{}^{pr}$

$$W_{i+1} - W_{i+1}{}^{pr} = \varphi_i \left(W_i - W_i^{pr} \right) + \left(U_i - U_i{}^{pr} \right) = \varphi_i W_i - \varphi_i W_i^{pr} + U_i - U_i{}^{pr} =$$

$$= \varphi_i W_i + U_i + \left(-\varphi_i W_i^{pr} - U_i{}^{pr} + W_{i+1}{}^{pr}, \right) \qquad i = \overline{0,1,2,...}$$

Самособойразумеется

$$W_{i+1} = \varphi_i W_i + U_i + \left(-\varphi_i W_i^{pr} - U_i{}^{pr} + W_{i+1}{}^{pr}, \right) \qquad i = \overline{0,1,2,...}$$

Здесь

$$V_i = \left(-\varphi_i W_i^{pr} - U_i{}^{pr} + W_{i+1}{}^{pr} \right), \tag{24}$$

если мы сделаем замену,

$$W_{i+1} = \varphi_i W_i + U_i + V_i, \qquad i = \overline{0,1,2,...} \tag{25}$$

Необходимо найти такого управляющее воздействие, которое

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left(W_i' R W_i + U_i' C U_i \right) \tag{26}$$

Здесь это $R = R', C = C', n \times n$ размерные константные матрицы.

5. Уравнения Эйлера-Лагранжа:

Для решения задачи (20), (23) напишем уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{bmatrix} W_{i+1} \\ \lambda_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_i & -\frac{1}{2} C^{-1} \\ R & \varphi_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \\ \lambda_{i+1} \end{bmatrix}, \tag{27}$$

условия границы же

$$\begin{pmatrix} -2\left(\varphi_0^T\right)^{-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{2n} \\ \lambda_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(-\varphi_0^T\right)^{-1} 2\alpha^T \\ 2\alpha^T \end{pmatrix} \tag{28}$$

Здесь λ_i - микротеле Лагранжа.

6. Система алгебраических дискретных периодических уравнений Риккати:

Если искать $\lambda_i = S_i W_i$ в форме решения задачи, то симметричная матричная последовательность, определяющая S_i оптимальный закон управления, обеспечивает повтояющееся отношение. (27), (28) примет следующий вид:

$$S_i = \varphi_i' S_{i+1} \left(E + C^{-1} S_{i+1} \right)^{-1} \varphi_i + R_i, \qquad i \neq 0, 2n$$

$$\begin{cases} S_1 W_1 = \left(\varphi_0'\right)^{-1} \left[\alpha^T + \frac{1}{2} Q W_0 \right] \\ S_{2n} W_{2n} = \alpha^T + \frac{1}{2} Q W_{2n} \end{cases}$$

Решение задачи (1),(2) находится следующим образом[3]:

$$W_{i+1} = \left(E + C^{-1} S_{i+1} \right)^{-1} \varphi_i W_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь:

$$U_i = -\frac{1}{2} \left(C + \frac{1}{2} S_{i+1} \right)^{-1} S_{i+1} \varphi_i W_i = K_i W_i$$

$$K_i = -\frac{1}{2}\left(C + \frac{1}{2}S_{i+1}\right)^{-1} S_{i+1}\varphi_i$$

Рассчитывая период для количества точек в задаче, используя [6].

$$S_0 = \varphi'(0,p)\left[E + S_{p+0}G(0,p)\right]^{-1} S_{p+0}\varphi(0,p) + R(0,p)$$

$$S_1 = \varphi'(1,p)\left[E + S_{p+1}G(1,p)\right]^{-1} S_{p+1}\varphi(1,p) + R(1,p)$$

$$S_2 = \varphi'(2,p)\left[E + S_{p+2}G(2,p)\right]^{-1} S_{p+2}\varphi(2,p) + R(2,p)$$

$$S_3 = \varphi'(3,p)\left[E + S_{p+3}G(3,p)\right]^{-1} S_{p+3}\varphi(3,p) + R(3,p)$$

.

.

.

$$S_k = \varphi'(k,p)\left[E + S_{p+k}G(2,k)\right]^{-1} S_{p+k}\varphi(k,p) + R(k,p)$$

получим систему нелинейных дискретных алгебраических уравнений Риккати. Матричная последовательность каждого элемента обеспечивает S_i дискретность. $S_{k+p} = S_k$ [6]

$$S_k = \varphi'(k,p)\left[E + S_kG(k,p)\right]^{-1} S_k\varphi(k,p) + R(k,p)$$

Таким образом, требуется найти решение дискретного алгебраического уравнения Риккати.

$$W_{i+p} = \left[E + G(i,p)S_{i+p}\right]^{-1} \varphi(i,p)W_i \;\; i = \overline{0,1,2,\ldots}$$

Системы имеют собственные значения внутри единичного круга. Тогда, если собственные значения матрицы находятся внутри единичного круга, значит, $\left[E + G(i,p)S_{i+p}\right]^{-1} \varphi(i,p)$ матрица системы U_i также будет обладать этим свойством. Отсюда при $i \to \infty$ следует, что $\left|W_{i+1} - W_{i+1}{}^{pr}\right| \to 0$. Это означает,что при $i \to \infty$ $W_{i+1} \to W_{i+1}{}^{pr}$, а это означает [2,3] .

7. Алгоритм

Напишем алгоритм решения задачи:

Шаг 1.

Формируются параметры колебательной системы n, m_1, m_2, a, b α Q, C

Шаг 2.

$A_i, B_i, i = \overline{0,1,2,\ldots}$ (4)-(15) если $\varphi_i, i = \overline{0,1,2,\ldots}$ (21) рассчитывается с помощью формулы.

Шаг 3.

Находятся уравнения Эйлера-Лагранжа (27)-(28) для задачи (20), (23).

Шаг 4.

решение задачи сводится к решению системы дискретных периодических уравнений Риккатти и задача решена.

8. Пример[1]:

$$m_1\ddot{y}(x)+aD^{\alpha}y(x)+by(x)=f(x),\ 0<x_0<x<l+x_0<2l+x_0<\dots$$

$$\begin{cases} y(l+x_0)=y(l+x_0-0), \\ \dot{y}(l+x_0)=-\dot{y}(l+x_0-0)+V, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(l+x_0)=y(x_0), \\ \dot{y}(l+x_0)=\dot{y}(x_0). \end{cases}$$

После дискретизации (25)-(26) будет выглядеть следующим образом:

$$W_{i+1}=\varphi_i W_i+U_i+V_i, \qquad i=\overline{0,1,2,\dots}$$

1. Для данных значений найдем решение

$$n=5, m_1=m_2=3, a=7, b=5, \alpha=\frac{7}{5}, Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, V=3, \mathrm{p}=3$$

2. $A_i, B_i, i=\overline{0,1,2,\dots}$ (4)-(15), если $\varphi_i, i=\overline{0,1,2,\dots}$ (21) рассчитывается с помощью формулы.

3 .Үравнения Эйлера-Лагранжа[5,12,13,14,20]:

$$.\begin{bmatrix}W_{i+1}\\ \lambda_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi_i & -\frac{1}{2}C^{-1}\\ R & \varphi_i^{'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_i\\ \lambda_{i+1}\end{bmatrix}, \qquad i=\overline{0,4}$$

условия границы же

$$\begin{pmatrix}-2\left(\varphi_0^{T}\right)^{-1} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_0\\ \lambda_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2R & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_4\\ \lambda_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(-\varphi_0^{T}\right)^{-1}2\alpha^{T}\\ 2\alpha^{T}\end{pmatrix}$$

4. К решению системы дискретных периодических уравнений Риккатти:

$$S_i=\varphi_i^{'}S_{i+1}\left(E+C^{-1}S_{i+1}\right)^{-1}\varphi_i+R_i, \qquad i\neq 0,4$$

$$\begin{cases} S_1W_1=\left(\varphi_0^{'}\right)^{-1}\left[\alpha^{T}+\frac{1}{2}QW_0\right] \\ S_4W_4=\alpha^{T}+\frac{1}{2}QW_4 \end{cases}$$

На графике 1 показан результат, полученный при оптимальной траектории программы и оптимальном регуляторе. Результат иллюстрируется для 3 периодов. Как видно, в третьем периоде результат регулятора уже близок к результату оптимальной программной траектории.Таким образом, как видно из приведенного примера, система асимптотически устойчива.

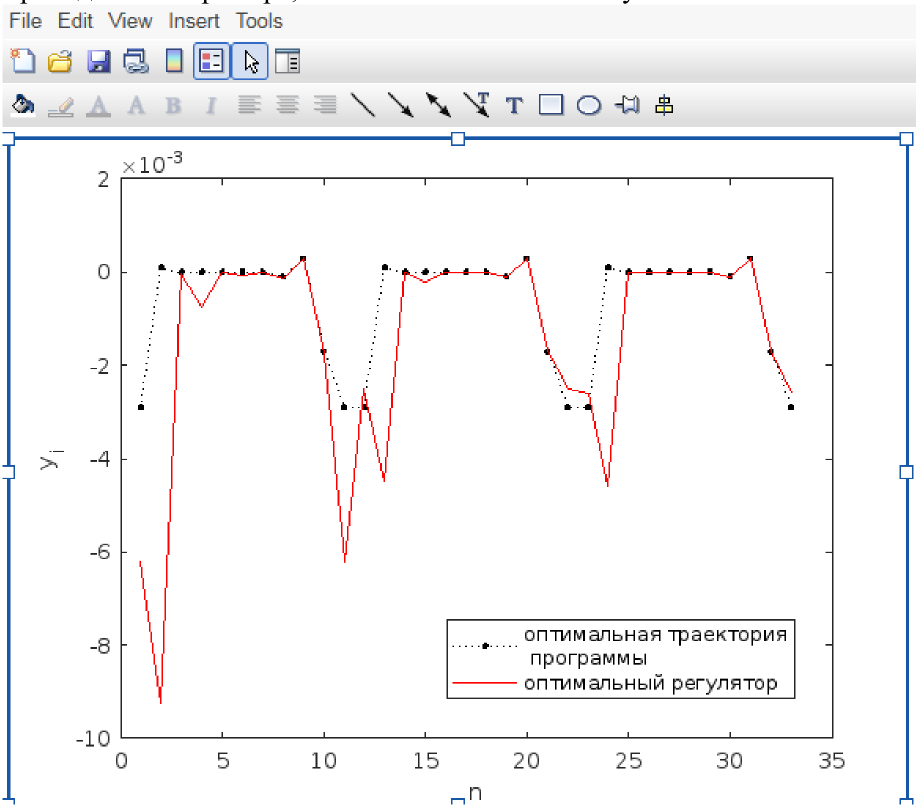

График 1. Зависимость оптимальной траектории программы и регулятора от *n*

Литература

1. Aliev F. A., Aliev N.A., Hajiyeva N.S. et al. Solution of an oscillatory system with fractional derivative including to equations of motion and to nonlocal boundary conditions. SOCAR Proceedings, N.4, (2021), pp.115-121.
2. Aliev F. A., Aliyev N.A., Hajiyeva N.S., Mahmudov N.I. Some mathematical problems and their solutions for the oscillating systems with liquid dampers: review. Applied and Computational Mathematics, V.20, N.3, (2021), pp.339-365.
3. Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems. Baku: Elm, (1989).

4. Aliev F.A., Aliev N.A., Rasulzade A.F., Hajiyeva N.S. Solution of the optimal program trajectory and control of the discretized equation of motion of sucker-rod pumping unit in a Newtonian fluid, TWMS J. App. and Eng. Math. V.13, N.4, (2023), pp.1369-1382.
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Rasulzade A.F., Hajiyeva N.S., Alieva I.V. Development of discrete asymptotic algorithm for the optimal trajectory and control in oscillatory systems with liquid damper, SOCAR Proceeding, N.2, (2024), pp 122-127
6. Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B. Calculation of the optimal stationary regulator, Soviet J. Comput. System Sci, (1985).
7. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach Sci., (1998), 272 p.
8. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410 p.
9. Aliev N.A., Velieva N.İ., Gasımova K.G., Resulzade A.F. , Discretization Method On Movement Equation Of The Oscillating System With Liquid Dumpers, Proceedings of IAM, ,V.8, N.2, (2019) pp. 211-228. (in russian)
10. Alieva I. V., Rasulzade A. F., Sevdimaliyev Y. Development of Algorithms for Solving the Optimization Problem of Oscillatory Systems with Liquid Dampers, Proceedings of the 9th İnternational Conferences on control and optimization with industrial applications, N1, (2024), pp 389-392
11. Andreev, Yu.I., Control of Finite-dimensional Linear Objects, Nauka, Moscow, 1976.
12. Bonilla B., Rivero M., Trujillo J.J. On systems of linear fractional equations with constant coefficients, Appl. Math. Comp., V.187, (2007), pp.68-76.
13. Bryson A., Ho Yu.Sh. Applied Theory of Optimal Control, Mir, Moscow, (1972).
14. Hajiyeva N.S. Determination of optimal program trajectory and control for the movement of the plunger sucker-rod pumping unit, Proceedings of IAM, N.11(2), (2022). 137-158. (in russian)
15. Monje, C. A., Chen, Y. Q, Vinagre, B. M, et al. Fractional – order systems and controls fundamentals and applications. London: Springer (2010)..
16. Mukhtarova N.S., Ismailov N. A. (2014). Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and

boundary control. TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics,N5(1), 130-137

17. Odibat, Z. M. (2010). Analytic study on linear systems of fractional differential equations. Computers & Mathematics with Applications, 59(3), 1171-1183.
18. Rasulzada A.F., Aliev N.A., Velieva N.I Algorithm For Determining Fractional Derivatives For Discrete Vibration Systems With A Liquid Damper, Proceedings of IAM, V.10, N.2, (2021), pp.181-191 (in russian)
19. Rasulzade, A. F., Hajiyeva, N. S., Ismailov, N. A. (2022). Determination of the optimal program trajectory and control for discretized movement of the plunger in rod pumping equipment. Proceedingsof IAM, 11(2), pp 203-220
20. Samko S.G, Kilbas A.A., Marichev O.I. (1993) Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, (1993), 780 p.

ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF DISCRETE PERIODIC OPTIMIZATION OF OSCILLATORY SYSTEMS WITH LIQUID DAMPERS

A.F. Rasulzade

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan
e-mail: resulzadeaynur@gmail.com

Abstract

The article formulates the problem of stabilizing oil production by a sucker-rod pump unit and shows that the solution is reduced to a periodic optimization problem in a lifting unit. Then its solution is carried out by reducing to the solution of the periodic matrix Riccati equation. The results are illustrated by a numerical example.

Keywords: Liquid damper, oscillatory system, discretization, Riccati equation, optimal control, stability.