Proceedings of IAM, V.14, N.2, 2025, pp.195-202
https://doi.org/10.30546/2225-0530.14.2.2025.2007

# МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

**М.М. Муталлимов [1,3,5], Н.И. Велиева [1,3], А.Дж. Ахмедова[2,3], А.Г. Джафаров[4]**

[1]Институт Прикладной математики при БГУ, Баку , Азербайджан
[2] Нахичеванский Государственный Университет, Нахичевань, Азербайджан
[3] Азербайджанский Технический Университет, Баку, Азербайджан
[4]Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, Баку , Азербайджан
[5]Институт Информационных Технологий, Министерство Науки и Образования, Баку, Азербайджан

**Абстракт.** Приводится вычислительный алгоритм для решения дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального регулятора по выходу, когда движение объекта описывается дескрипторными системами. Предложенный вычислительный алгоритм требует решение двух обобщенных дискретных алгебраических уравнений Ляпунова. Решение обобщенных алгебраических дискретных уравнений Ляпунова (ОАДУЛ) решается с помощью итерационных методов Начальное значение выбирается из условия асимптотически устойчивости замкнутой дискретной системы. Результаты иллюстрируется примером.

**Ключевые слова:** линейно-квадратичной задачи, обобщенное дискретное уравнение Ляпунова, итеративные алгоритмы, дескрипторные системы.

**AMS Subject Classification:** 49N10, 49N20, 65F10.

## 1. Введение

В теория дискретных дескрипторных систем, с развитием вычислительной техники играет важную роль в теории автоматического управления. На практике дискретные системы обычно появляются либо в результате дискретизации непрерывных систем, либо в том случае, если наблюдению доступен сигнал только в определенные моменты времени. Дискретные дескрипторные системы также описывают социальные или экономические процессы. дескрипторные системы применяются при моделирование движения летательных аппаратов [24], химических процессов, в экономических системах

Следует заметить, что в теории дескрипторных систем между непрерывными и дискретными системами существуют заметные различия.

В последнее время появилось много работ, посвященных изучению дескрипторных систем, которые также называют вырожденными, дифференциально-алгебраическими, не разрешенными относительно производной. Дескрипторные системы являются обобщением обыкновенных систем дифференциальных уравнений и, конечно же, включают их как частный случай. При анализе и решении дескрипторных систем возникает ряд затруднений, которые не появляются при исследовании систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучению свойств решений и построению численных методов для непрерывных дескрипторных систем посвящены работы [2,4-6,9-12, 13-18]. В данной работе рассмотрена решения дискретной линейно-квадратичной задачи оптимального регулятора [3,7,22] по выходу, когда движение объекта описывается дескрипторными системами. Предлагается вычислительный алгоритм для решения поставленной задачи. В этом алгоритме требуется решение двух обобщенных дискретных алгебраических уравнений Ляпунова [19-21,23] в котором решение обобщенных алгебраических дискретных уравнений Ляпунова (ОАДУЛ) решается с помощью итерационных методов [22,25,26] Начальное значение выбирается из условия асимптотически устойчивости замкнутой дискретной системы. Результаты иллюстрируется примером.

## 2. Постановка задачи

Пусть движение объекта описывается стационарной системой конечно- разностных уравнений

$$Ex(i+1) = \Psi x(i) + \Gamma u(i), \qquad i = 1,2,\ldots,\ x(0) = X_0 \qquad (1)$$
$$y(i) = Cx(i)$$

где требуется минимизировать функционал

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \left( x'(i) Q x(i) + u'(i) R u(i) \right), \qquad (2)$$

с помощью закона регулирования

$$u(i) = Fy(i) = FCx(i) \qquad (3)$$

так, чтобы замкнутая система (1)+ (3)

$$Ex(i+1) = (\Psi + \Gamma FC)\, x(i), \qquad , \quad i = 0,1,\ldots, \qquad (4)$$

была асимптотически устойчива .

Дискретная дескрипторная система (1) называется стабилизируемой , если существует закон управления в форме (3) такой, что замкнутая система (4) является устойчивой.

Здесь $x(i) - n -$мерный вектор фазовых координат объекта, $u(i) - m -$мерный вектор управляющих воздействий, $E, C, \Psi, \Gamma$, $Q = Q' \geq 0$, $R = R' > 0$, известные постоянные матрицы соответствующих размерностей, матрица $E$ плохо обусловленная квадратная матрица. Этот факт не позволяет обратить матрицу $E$ и перейти к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Предполагается, что $\det(E) \neq 0$.Тогда система (1) можно привести к следующему виду

$$x(i+1) = E^{-1}\Psi x(i) + E^{-1}\Gamma u(i), \qquad i = 1,2,..., \; x(0) = E^{-1}X_0 \tag{9}$$

Обозначим

$$\overline{\Psi} = E^{-1}\Psi \; ; \overline{\Gamma} = E^{-1}\Gamma . \tag{8}$$

Тогда уравнение (9) запишем в виде

$$x(i+1) = (\overline{\Psi} x(i) + \overline{\Gamma} FC) x(i), \qquad i = 1, 2, ...,$$

Согласно [2,10], решение задачи (9),(2), (3) сводится к решению уравнений

$$L = \left(\overline{\Psi} + \overline{\Gamma} FC\right)' L\left(\overline{\Psi} + \overline{\Gamma} FC\right) + Q + C'FRFC, \tag{10}$$

$$U = \left(\overline{\Psi} + \overline{\Gamma} FC\right) U\left(\overline{\Psi} + \overline{\Gamma} FC\right)' + X_0 \;, \tag{11}$$

$$F = -\left(R + \overline{\Gamma}' L \overline{\Gamma}\right)^{-1} \overline{\Gamma}' L \overline{\Psi} UC'\left(CUC'\right)^{-1} \tag{12}$$

Если учесть обозначение (8) тогда системы (10)-(12) можно записать в следующем виде

$$E'E'^{-1}LE^{-1}E = \left(E^{-1}\Psi + E^{-1}\Gamma FC\right)' L\left(E^{-1}\Psi + E^{-1}\Gamma FC\right) + Q + C'FRFC,$$

$$EUE' = EE^{-1}\left(\Psi + \Gamma FC\right) U\left(\Psi + \Gamma FC\right)' E'^{-1}E' + EX_0E' \;,$$

$$F = -\left(R + \Gamma' E'^{-1} L E^{-1} \Gamma\right)^{-1} \Gamma' E'^{-1} L E^{-1} \Psi UC'\left(CUC'\right)^{-1}$$

Обозначим

$$P = E'^{-1}LE^{-1}$$

Тогда получим ниже следующую уравнение

$$E'PE = \left(\Psi + \Gamma FC\right)' P\left(\Psi + \Gamma FC\right) + Q + C'FRFC, \tag{13}$$

$$EUE' = \left(\Psi + \Gamma FC\right) U\left(\Psi + \Gamma FC\right)' + EX_0 E', \tag{14}$$

$$F = -\left(R + \Gamma' P \Gamma\right)^{-1} \Gamma' P \Psi UC'\left(CUC'\right)^{-1} \tag{15}$$

Как известно для решения задачи (9),(2),(3) имеются вычислительные алгоритмы требующий на каждом шаге решение двух дискретных обобщённых алгебраических уравнение Ляпунова. Обобщённое уравнение Ляпунова дискретного времени (13) имеет единственное решение, если собственные значения матрицы $\left(\Psi + \Gamma FC\right)$ лежали внутри единичного круга. Для решение обобщенного дискретного уравнение Ляпунова (13) использован пакет прикладных программ Матлаб процедура X = dlyap(A,Q,[],E). Скобки пустого квадрата, [14-17], обязательны.

Попытаемся обобщить эти результаты для систем (13)-(15). Здесь на каждом шаге решается обобщенное дискретное уравнения Ляпунова. В отличия от (10)-(12) в (13)-(15) присутствует не $E^{-1}$ а $E$, который может облегчит вычислительный процесс.

Из выше указанных доказали следующую теорему

**Теорем**. Допустим система (1) управляема и наблюдаема. Тогда решение задачи (1) - (3) сводится к решению уравнений (13)-(15).

Градиент функционала (3) по отношению к матрице цепи обратной связи определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial J}{\partial F} = \left[R + \Gamma' P \Gamma\right] FCUC' + \Gamma P \Psi UC' .$$

При оптимальной [1,13,18] значение матрицы $F$, градиент функционала $\frac{\partial J}{\partial F} = 0$ приближается к нулю.

Для решения уравнений (13)-(15) можно предложить следующий итерационный алгоритм

**Алгоритм 1.**

1. Заданы матрицы $\Psi, \Gamma, Q, R, E, C$
2. Выбираем начальное приближение $F_i$ так, чтобы собственные числа матрицы $\lambda(I - (\Psi + \Gamma F_i C))$ лежали внутри единичного круга. Здесь I— единичная матрица соответствующий размерности .

3 .Решаем нижеследующие дискретное обобщенное уравнения Ляпунова

$$E' P_i E = \left(\Psi + \Gamma F_i C\right)' P_i \left(\Psi + \Gamma F_i C\right) + Q + C' FRFC,$$

$$EU_i E' = \left(\Psi + \Gamma F_i C\right) U_i \left(\Psi + \Gamma F_i C\right)' + EX_0 E',$$

4. Вычисляем ниже следующую выражению

$$F_{i+1} = -\left(R + \Gamma' P_i \Gamma\right)^{-1} \Gamma' P_i \Psi U_i C' \left(CU_i C'\right)^{-1}$$

5. Проверяем условие $\left\| F_{i+1} - F_i \right\| \le \varepsilon$. Если условие удовлетворяется процедура вычисления прекращается, иначе приравнивая $F_i = F_{i+1}$, переходим к шагу 3. ($\varepsilon$ - заданное точность решение задачи)

Градиент функционала (3) по отношению к матрице цепи обратной связи определяется следующим соотношением:

$$\frac{\partial J}{\partial F} = \left[ R + \Gamma' P \Gamma \right] FCUC' + \Gamma P \Psi UC' .$$

Проиллюстрируем работоспособность алгоритма в нижеследующим примере

**Пример 1**. Матрицы $\Psi, \Gamma, C, Q, R$, фигурирующие в (1.), (2), (3) имеют вид

$$\Psi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычисление проводилось при различных значениях $a$ .

Решая уравнений (13)-(15) с помощью вышеуказанного алгоритма полученное коэффициент оптимального регулятора F им градиент функционала обозначим G

В таблице приведен степень приближения градиента функционала к нулю.

| a | F | G |
|---|---|---|
| 1 | [-1.7428 -0.3793 0.0007 -2.8351] | 0.000543e-15 |
| $10^{-6}$ | [-2.9586 -9.6001 0.0021 -2.9882] | 1.995e-12 |
| $10^{-8}$ | [-1.8629 -9.3092 -0.0004 -3.0094] | 2.5408e-11 |
| $10^{-15}$ | [-1.8629 -9.3092 -0.0004 -3.0094] | 1.6221e-11 |
| $10^{--21}$ | [-1.8612 -9.3097 -0.0023 -3.0089] | 9.3583e-10 |
| $10^{-55}$ | [ -1.8612 -9.3097 -0.0023 -3.0089] | 0.2105e-9 |

Как видно из таблице,что при уменьшение значений a , описанный выше алгоритм1 дает эффективное значение.

## Литература


1. Aliev F.A., Velieva N.I., Safarova N.A., Niftili A.A., Methods for solving of stabilization problem of the discrete periodic system with respect to output variable, Appl. Comput. Math, 2007, V.6, N.1, pp.27-38.
2. Aliev F.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the problem of optimal stabilization by output and their application, IFAC-PapersOnLine, 2011, V.51, N.30, pp.323-330
3. Aliev F., Mutallimov M., Hajiyeva N., Velieva N., Abbasov A., Ismayilov N.A. Optimal Regulators for Multipoint Problems of Dynamic Systems, Proceedings of the 9 th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, (COIA 2024), (2024), pp.332-335.
4. Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems, Baku Elm, 1989, 320 p.
5. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I. Algorithm for solving the Cauchy problem for stationary systems of fractional order linear ordinary differential equations, Computational methods for differential equations, V.8, N.1, (2020), pp.212-221.
6. Aliev F.A., Aliev N.A., Safarova N.A., Velieva N.I., Larin parameterization to solve the problem of analytical construction of the optimal regulator of oscillatory systems with liquid dampers, J. Appl. Comput. Mech., V.6 (SI), (2020), pp.1426-1430.
7. Aliev F.A., Asanzadeh M., Larin V.B., Velieva N.I. An inverse problem of the synthesis of optimal output variable regulators, Appl. Comput. Math, V.5, N.1, (2006), pp.35-44.
8. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N., Gasimova K., Faradjova S. Algorithm for solving the systems of the generalized Sylvester-transpose matrix equations using LMI, TWMS Journal of Pure & Applied Mathematics, V.10, N.2, (2019).
9. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press , ISBN 197724985X, 9781977249852, 2022, 410p.
10. Aliev F.A., Velieva N.I., Larin V.B. On the safe stabilization Problem, J. of Automation and Sciences.- Information 1997.- 29, N 4{\&}5.- P. 31-41
11. Aliev F.A., Velieva N.I., Maradanov M.D. Algorithm for solving the synthesis problem for an optimal stabilization system with respect to the output variable, Engineering Simulation, V.13, N.4, (1996), pp.625-634.
12. Aliev FA, Hajiyeva NS, Mutallimov MM, Velieva NI, Namazov AA, Algorithm for solution of linear quadratic optimization problem with

constraint in the form of equalities on control, Appl. Comput. Math, 2024, V.23,N.3, pp.404-414.

13. Bernussou J., Peres P.L.D., and Geromel, J.C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. Syst. Contr.Lett., vol. 13, pp.65-72, July 1989.
14. Boyd S. and Yang, Q. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems, Int.J.Contr., vol. 49, N 6, pp. 2215-2240,1989.
15. Geromel J.C., Peres P.L.D., and Bernussou J., On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. SIAM J. Contr. Optimz. vol. 29, N2, pp.381-402, Mar.1991.
16. Geromel J.C., Yamakami A. Armentano Structural constrains controllers for discrete time linear systems J.of Optimization Theory and Applications V.61,N1 april 1989
17. Geromel, J.C., Souza de C.C., Skelton R.E. Static output feedback controllers stability and convexity.IEEE Trans.Autom.Control 1998,43(1) pp.120-125
18. Larin V.B. Stabilization of the system by static output feedback. An Int. Journal ACM, 2003, Vol.2, No.1, p. 47-51.
19. Levine W.S., Athans M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems IEEE Trans.Autom. Control, 1970 V.AC-15, N1
20. Mutalilmov M.M., Velieva N.I., Amirova L.I. Computational algorithm for construction of a regulator with incomplete feedback, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 2023, V.12, N.2, pp.102-112.
21. Mutallimov M.M. , Javadov N.G. , Rasulova U.Z. , Velieva N.I., Aliev F.A., Algorithm for construction of optimal regulators and filters for a discrete linear-quadratic gaussian problem in a steady mode, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, 2022, V.11, N.2, pp.113-119.
22. Mutallimov M.M.,Velieva N.I., Safarova N.A., Aliev F.A. Determination of the transition point to the steady-state regime in a continuous linear-quadratic optimization problem, Applied and Computational Mathematics, V.24, N.4, (2025), pp.706-716.
23. Peres P.L.D.and Geromel J.C. An alternate numerical solution to the linear quadratic problem IEEE Trans.Autom. Control V.39 N1 January 1994.
24. Stevens B.L. , Lewis F.L. Aircraft Modeling . Dynamics and Control, New York, Wiley,1991.
25. Velieva N.I., Niftili A.A. Computational algorithm for solving a periodic discrete problem of an optimal controller by output. Bulletin of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, series of physical, technical and mathematical sciences, 2007, N.2-3, pp. 106-111.
26. Velieva N.I., Niftili A.A., Aliev S.Ya. Iterative Algorithm for Solving the Problem of Optimal Output Regulator in the Continuous Case. BSU Bulletin 2008, N.1.

# METHODS FOR SOLVING OPTIMAL STABILIZATION PROBLEMS FOR DISCRETE DESCRIPTOR SYSTEMS

**Mutallimov M.M.[1,3,5], Velieva N.I.[1,3], Akhmedova A.J.[2,3], Jafarov A.G.[4]**

[1]Institute of Applied Mathematics at Baku State University, Baku, Azerbaijan
[2]Nakhchivan State University, Nakhchivan, Azerbaijan
[3]Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan
[4]Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
[5]Institute of Information Technology, Ministry of Science and Education, Baku, Azerbaijan

**Abstract.** A computational algorithm is presented for solving a discrete linear-quadratic optimal output controller problem when the plant motion is described by descriptor systems. The proposed computational algorithm requires solving two generalized discrete algebraic Lyapunov equations. Generalized algebraic discrete Lyapunov equations (GADLEs) are solved using iterative methods. The initial value is chosen based on the asymptotically stable condition for the closed-loop discrete system. The results are illustrated with an example.

**Keywords:** linear-quadratic problem, generalized discrete Lyapunov equation, iterative algorithms, descriptor systems.