Proceedings of IAM, V.5, N.1, 2016, pp.11-17

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С S - ФУНКЦИЕЙ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аг. Х. Ханмамедов[1,2] **, Л. К. Асадова**[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
e-mail: agil_khanmamedov@yahoo.com

Резюме. Рассмотрено дискретное уравнение Штурма-Лиувилля, коэффициенты которого обеспечивают существование рассеяния лишь в одну сторону. Исследованы уравнения с ядрами, определяющимися S- функцией. Доказаны теоремы, позволяющие установить однозначную разрешимость основного уравнения обратной задачи.

Ключевые слова: дискретное уравнение Штурма-Лиувилля, задача рассеяния, S - функция, обратная задача, основное уравнение.

AMS Subject Classification: 47B39.

1. Введение

Рассмотрим дискретное уравнение Штурма-Лиувилля

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_n y_n+a_n y_{n+1}=\lambda y_n, n\in Z, \tag{1}$$

где вещественные коэффициенты $a_n>0, b_n$ удовлетворяет условиям

$$a_n\to 0, b_n\to 0 \text{ при } n\to+\infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}|n|\left(|a_n-1|+|b_n|\right)<\infty . \tag{3}$$

Условие (2) показывает, что рассеяния на $+\infty$ отсутствует. В случае, когда рассеяние существует в обе стороны, обратная задача, т.е. задача восстановления коэффициентов a_n, b_n по данным рассеяния, была решена в работах $[3],[4]$. При сделанных предположениях о коэффициентах решением задачи рассеяния называется решение уравнения (1), которое определяется требованием убывания в области, где a_n исчезает, и асимптотикой на непрерывном спектре

$$\Phi_n(\lambda)=z^{-n}+S(\lambda)z^n+o(1), n\to-\infty .$$

Функцию $S(\lambda)$ назовем функцией рассеяния или же S-функцией. Заметим, что обратная задача для уравнения (1) при условиях (2), (3) впервые рассматривалась в работе $[5]$. Однако отличительной чертой нашего случая является исследование функции $S(\lambda)$ и решение обратной задачи по функции рассеяния.

2. Предварительные сведения

В пространстве $\ell_2[0,\infty)$ рассмотрим оператор L_0, порожденный уравнением (1) и граничным условием $y_{-1}=0$. Согласно условию (2) оператор L_0 вполне непрерывен и самосопряжен. Следуя $[2]$ вводим функцию Вейля $m(\lambda)=\langle R_\lambda\delta,\delta\rangle$ оператора L_0, где R_λ - резольвента оператора L_0 и $\delta=(1,0,0,...)\in\ell_2[0,\infty)$. Известно, что (см. $[2]$)

$$m(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\lambda_n-\lambda},\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=1 \qquad (4)$$

Обозначим через $P_n(\lambda)$ и $Q_n(\lambda)$ решения уравнения (1) с условиями $P_{-1}(\lambda)=Q_0(\lambda)=0, P_0(\lambda)=1, Q_1(\lambda)=\dfrac{1}{a_0}$. Вводим также решение Вейля

$$\Psi_n(\lambda)=Q_n(\lambda)+m(\lambda)P_n(\lambda), n\in Z$$

уравнения (1).

Пусть Γ- комплексная λ- плоскость с разрезом по отрезку $[-2,2]$. Рассмотрим функцию $z=z(\lambda)=\dfrac{\lambda}{2}+\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}-1}$, где ветвь радикала выбирается из условия $\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{4}-1}<0$ при $\lambda>2$.

Предположим, что выполняется условие (3). Тогда уравнение (1) имеет $[3]-[5]$ решение Йоста $f_n(\lambda)$, представимое в виде

$$f_n(\lambda)=\alpha_n z^{-n}\left(1+\sum_{m=-\infty}^{-1}A_{nm}z^{-m}\right), n\in Z,$$

где величины α_n и A_{nm} удовлетворяют соотношениям

$\alpha_n>0, \alpha_n\to 1$ при $n\to-\infty$,

$$A_{nm} = O\left(\sum_{k=-\infty}^{n+\left[\frac{m}{2}\right]-1} |a_k - 1|\right) \text{ при } n+m \to -\infty,$$

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}},$$

здесь $[\cdot]$ означает целую часть. В работах [1],[5] установлена связь при $\lambda \in \partial\Gamma, \lambda^2 \neq 4$, $\lambda \neq \pm\lambda_n, n = 1,2,...$ между решениями Флоке и Йоста:

$$\frac{\Psi_n(\lambda)}{a(\lambda)} = \overline{f_n}(\lambda) + S(\lambda) f_n(\lambda), n \in Z \quad ,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{f_0(\lambda) + a_{-1} m(\lambda) f_{-1}(\lambda)}{z - z^{-1}}, S(\lambda) = \frac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}. \tag{6}$$

Там же доказано, что функция $a^{-1}(\lambda)$ непрерывна при $\lambda \in \partial\Gamma, \lambda \neq 0$ и допускает регулярное продолжение в плоскость Γ и там может иметь (см. [5]) конечное число простых вещественных нулей $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_p$, лежащих вне отрезка $[-2,2]$. Кроме того, функция $a^{-1}(\lambda)$ ограничена вблизи границы плоскости Γ. Введем обозначения

$$M_k^{-2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^2(\mu_k), k = 1,2,...,. p,$$

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Gamma} \frac{S(\lambda)}{z - z^{-1}} z^{-n} d\lambda + \sum_{k=1}^{N} M_k^2 z^{-n}(\mu_k).$$

Тогда [1],[5] имеет место основное уравнение типа Марченк

$$F_{2n+m} + A_{nm} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{nk} F_{2n+m+2k} = 0, n \leq 0, m \leq -1, \tag{7}$$

$$\alpha_n^{-2} = 1 + F_{2n} + \sum_{k=-\infty}^{-1} A_{nk} F_{2n+k}, n \leq 0.$$

3. Свойства S - функции

Известно (см. [3],[4]), что при исследовании однозначной разрешимости основного уравнения (4) важную роль играют уравнения с ядрами

$$F_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Gamma}\frac{S(\lambda)}{z - z^{-1}} z^{-n} d\lambda. \tag{8}$$

Этот пункт посвящена изучений таких уравнений.

Теорема 1. Уравнение

$$h_m + \sum_{k=-\infty}^{-1} F_{k+m}^{(1)} h_k = 0, m \le -1 \tag{9}$$

в пространстве $\ell_2(-\infty,-1]$ имеет ровно p линейно независимых решений.

Доказательство. Пусть h_m есть решение уравнения (9) из $\ell_2(-\infty,-1]$. Поскольку $F_m^{(1)}$ вещественна, не нарушая общности, можно считать, что h_m вещественны.

Рассмотрим функцию

$$H(\lambda) = \sum_{m=-\infty}^{1} h_m z^{-m} , \tag{10}$$

регулярную в плоскости Γ. Из последней формулы следует,что

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} h_m^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Gamma}\frac{1}{z - z^{-1}} |H(\lambda)|^2 d\lambda , \tag{11}$$

Умножим теперь обе части равенства (9) на h_m и просуммируем по m в пределах от 1 до ∞:

$$\sum_{m=-\infty}^{-1} h_m^2 + \sum_{m=-\infty}^{-1} h_m \sum_{k=-\infty}^{-1} F_{m+k}^{(1)} h_k = 0 .$$

Подставляя сюда вместо $F_{m+k}^{(1)}$ его выражение (8) и принимая во внимание (11), имеем

$$\int_{\partial\Gamma}\frac{1}{z - z^{-1}}\left[|H(\lambda)|^2 d\lambda + S(\lambda) H^2(\lambda)\right] d\lambda = 0 .$$

Из последнего равенства с учетом формулы (4) найдем, что

$$\int_{[-2,2]}\frac{1}{\sqrt{4-\lambda^2}}\left[2|H(\lambda+i0)|^2 + S(\lambda+i0)H^2(\lambda+i0) + \overline{S(\lambda+i0)}\,\overline{H^2(\lambda+i0)}\right] d\lambda = 0$$

.

Тогда пользуясь равенством

$$2|H(\lambda+i0)|^2 + S(\lambda+i0)H^2(\lambda+i0) + \overline{S(\lambda+i0)}\,\overline{H^2(\lambda+i0)} =$$
$$= \left|\overline{H(\lambda+i0)} + S(\lambda+i0)H(\lambda+i0)\right|^2 ,$$

которое вытекает из (4), имеем при почти всех $\lambda \in [-2,2]$

$$\overline{H(\lambda+i0)} + S(\lambda+i0)H(\lambda+i0) = 0 .$$

Так как

$$H(\lambda+i0)=\overline{H(\lambda-i0)},\quad S(\lambda+i0)=\overline{S(\lambda-i0)}$$

при $\lambda\in[-2,2]$, то при почти всех $\lambda\in\partial\Gamma$ функция $H_1(\lambda)=\dfrac{H_1(\lambda)}{z-z^{-1}}$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{\overline{H_1(\lambda)}}{\overline{a(\lambda)}}=\frac{H_1(\lambda)}{a(\lambda)}.$$

Таким образом, функция $\dfrac{H_1(\lambda)}{a(\lambda)}$ вещественна при почти всех $\lambda\in[-2,2]$ и поэтому она регулярна для всех $\lambda\in[-2,2]$. Следовательно, функция $\dfrac{H_1(\lambda)}{a(\lambda)}$ регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением, быть может нулей μ_j, $j=1,..,p$ функции $a(\lambda)$. Введем в рассмотрение функцию

$$g(\mu)=\frac{H_1(\mu)}{(\mu-\lambda)a(\mu)}.$$

По теореме о вычетах, получим

$$\operatorname*{res}_{\mu=\lambda} g(\mu)+\sum_{j=1}^{p}\operatorname*{res}_{\mu=\mu_j} g(\mu)+\operatorname*{res}_{\mu=\infty} g(\mu)=0.$$

Тогда из (4), (6), (10) следует, что

$$\frac{H_1(\lambda)}{a(\lambda)}+\sum_{j=1}^{p}\frac{H_1(\mu_j)}{(\mu_j-\lambda)\dot a(\mu_j)}=0,$$

согласно которому

$$\frac{H(\lambda)}{a(\lambda)(z-z^{-1})}=\sum_{j=1}^{p}\frac{H(\mu_j)}{\dot a(\mu_j)(z_j-z_j^{-1})(\lambda-\mu_j)},\tag{12}$$

где $z_j=z(\mu_j)$, $j=1,...,p$.

Итак, мы обнаружили справедливость следующего факта: если h_m есть решение из $\ell_2(-\infty,-1]$ уравнения (9), то его преобразование (10) представляется в виде (12). Оказывается, что верно и обратное утверждение. А именно, любая функция $H(\lambda)$ вида (12), где $H(\mu_j)=c_j$, $j=1,..,p-$ заданы произвольно, является преобразованием (2.53) некоторого решения h_m уравнения (9) из $\ell_2(-\infty,-1]$. Действительно, функция (12) регулярна в плоскости Γ и непрерывна вплоть до границы $\partial\Gamma$. Поэтому, эта функция разлагается в ряд

$$\frac{H(\lambda)}{a(\lambda)(z-z^{-1})}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h_m z^{-m}\ . \tag{13}$$

С другой стороны, из (4), (10) следует, что $\dfrac{H(\lambda)}{a(\lambda)(z-z^{-1})}\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Ввиду последнего, ряд (13) должен обрываться при $m\geq 0$, т.е.

$$\frac{H(\lambda)}{a(\lambda)(z-z^{-1})}=\sum_{m=-\infty}^{-1}h_m z^{-m}\ .$$

Далее, из (4), (12) найдем, что при $\lambda\in\partial\Gamma$ функция $H(\lambda)$ удовлетворяет тождеству

$$\overline{H(\lambda)}+S(\lambda)H(\lambda)=0,$$

согласно которому h_m есть решение уравнения (9).

Эти соображения показывают, что число линейно независимых решений уравнения (9) из $\ell_2(-\infty,-1]$ совпадает с числом линейно независимых функций вида

$$\frac{c_j}{(\lambda-\mu_j)\dot{a}(\mu_j)},$$

где c_j, $j=1,\ldots,p$ – произвольные вещественные постоянные, и поэтому как легко видеть, равно числу p.

Теорема доказана.

Подобным же образом доказывается

Теорема 2. Уравнение

$$\sum_{k=0}^{+\infty}F_{k+m}^{(1)}h_k=h_m, m\geq 0$$

в пространстве $\ell_2[0,+\infty)$ имеет лишь тривиальное решение.

Литература

1. Asadova L.K., Khanmamedov A.Kh., Inverse scattering problem for a class of discrete Schrodinger operators, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 2013, Vol.XXXVIII(XLVI), pp.81-86.
2. Березанский Ю.М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, 1965, Киев, Наукова Думка.
3. Гусейнов Г.Ш., Определение бесконечной матрицы Якоби по данным рассеяния, Докл. АН СССР, 1976, т.227, №6, с.1289-1292.

4. Гусейнов Г.Ш , Обратные задачи рассеяния для самосопряженных операторов второго порядка, Автореферат дисс. канд.физ.-мат. наук, МГУ, Москва, 1976.
5. Ханмамедов Аг.Х., Обратная задача рассеяния для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля на оси, Матем. сб.,2011, т.202, №7, с.147-160.

Diskret şturm-liuvill tənliyinin S -funksiyasi ilə əlaqəli olan bəzi tənliklərin həll olunmasi

A.X. Xanməmmədov, L.K. Əsədova

XÜLASƏ

Əmsalları yalnız bir tərəfdə səpilmənin varlığını təmin edən diskret Şturm-Liuvill tənliyinə baxılır. Nüvələri S -funksiya ilə təyin olunan tənliklər araşdırılmışdır. Tərs məsələnin əsas tənliyinin birqiymətli həll olunmasını təmin edən teoremlər isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: diskret Şturm-Liuvill tənliyi, səpilmə məsəlsi, S -funksiya, tərs məsələ, əsas tənlik.

On a solvablity of some equations related with s-functions of the discrete equation Sturm-Liouville

A.Kh. Khanmamedov, L.K. Asadova

ABSTRACT

Discrete Sturm-Liouville equation is considered, the coefficients of which provides existence of the scattering only in one direction. The equations are studied with kernels defined by S-functions. The theorems are proved, that allow one to set the unique solvability of the main equation of the inverse problem.

Keywords: discrete Sturm-Liouville equation, scattering problem, S-function, inverse problem , main equation.